

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 32 • HEFT 3 • JUNI 1938

Zur Theorie der Elektronenbeugung bei Berücksichtigung von mehr als 2 Strahlen und zur Erklärung der Kikuchi-Enveloppen. II

Von Ernst Lamla

(Mit 2 Abbildungen)

(Schluß)

Die Gestalt der Grenzfläche

Die oben gemachte Annahme, daß das Vakuum mit dem Potential Null und der Kristall mit dem inneren Potential V durch eine mathematische Ebene voneinander geschieden werden, ist vom physikalischen Standpunkt im Hinblick auf den Aufbau des Kristalls aus Atomen wenig befriedigend. Es ist andererseits aber sehr schwer, zu sagen, wie man diese Grenze ziehen soll. Am richtigsten wäre es, zwischen Kristall und Vakuum eine Übergangsschicht einzulegen, in der das Potential allmählich auf Null absinkt. (Eine Änderung des Gitters in Richtung der Normale zur Grenze könnte hierbei berücksichtigt werden.) Ein solcher Ansatz führt aber auf große mathematische Schwierigkeiten. Eine Näherung, die jedenfalls den wirklichen Verhältnissen näher kommen dürfte als die Annahme einer ebenen Grenze, besteht darin, daß wir als Grenze die Fläche $z = \bar{z}$ ansetzen, wobei \bar{z} eine Funktion von x und y ist, die die Periodizität des Oberflächengitters besitzt:

$$\bar{z} = \sum_{g_1 g_2} z_g e^{-\frac{j}{\lambda} (e_g x + \sigma_g y)}.$$

Die Grenzfläche ist periodisch gebuckelt. Die Gleichungen für das Kristallinnere bleiben völlig ungeändert. Die Wellenfunktion (17) der ankommenden Welle müßte dann mit (16) für $z = \bar{z}$ übereinstimmen. Setzen wir $z = \bar{z}$ in (17) ein, so wird der Ausdruck $e^{-\frac{j}{\lambda} \gamma z}$ offenbar wieder eine periodische Funktion von x und y mit der Periode des Oberflächengitters. Wir können ihn daher durch eine Fourierreihe darstellen, und $\Psi^{(a)}$ nimmt an der Oberfläche die Gestalt an

$$\Psi_{z=\bar{z}}^{(a)} = e^{-\frac{j}{\lambda} (a x + \beta y)} \cdot \sum_{g_1 g_2} A_{g_1 g_2} e^{-\frac{j}{\lambda} (e_g x + \sigma_g y)}.$$

In einfachsten Fällen, z. B. für $\bar{z} = z_0 + z_g \cos 2\pi \left(\frac{g_1 x}{a_1} + \frac{g_2 y}{a_2} \right)$ läßt sich A durch Besselsche Funktionen von γ ausdrücken. Im Kristall muß es daher wieder mindestens eine Welle geben, für die $\alpha_0 = \alpha$ und $\beta_0 = \beta$ ist, und allgemein müssen wieder Wellen mit den X - und Y -Komponenten α_g/λ und β_g/λ auftreten und keine anderen. Die Grenzbedingungen werden zwar komplizierter; es läßt sich aber allgemein folgendes sagen: Durch die neue Annahme über die Form der Grenzfläche entstehen weder im Kristall noch im Vakuum irgendwelche neuen Wellenrichtungen gegenüber dem Fall der ebenen Begrenzung; wohl aber wird die Verteilung der Intensität auf die verschiedenen möglichen Richtungen im allgemeinen anders. Der aus der Richtung $(\alpha \beta \gamma)$ einfallende Strahl wird gewissermaßen schon beim Auftreffen in Strahlen aus verschiedenen Richtungen $(\alpha_g \beta_g \gamma_g)$ aufgespalten; das kann in geeigneten Fällen z. B. Anlaß zu stärkeren Reflexen in Richtungen geben, in denen solche von vornherein nicht zu erwarten sind.

Anders ist es, wenn etwa infolge von feinen Rissen und Sprüngen der Oberfläche, von Unregelmäßigkeiten des Oberflächengitters und ähnlichem die Größe \bar{z} eine nichtperiodische Funktion von x und y ist. Sie kann dann als Fouriersches Integral dargestellt werden, und wir erkennen, daß die Erscheinung sich dann nicht so verhält, als ob der ankommende Strahl in Strahlen aus verschiedenen diskreten Richtungen mit verschiedenen Intensitäten aufgespalten wird, sondern als ob er darüber hinaus an manchen Stellen über kontinuierlich verteilte Richtungen verschmiert wird. Wir würden dann nicht nur unerwartete Reflexe, sondern auch gegebenenfalls eine Verbreiterung des reflektierten oder durchgelassenen Strahles erwarten können. Daß ähnliche Erscheinungen (breite Linien, diffuse Flecken) wirklich auftreten, zeigen die experimentellen Befunde.

Dem Folgenden legen wir die Annahme einer ebenen Grenze zugrunde.

Näherungslösung mittels Reihenentwicklung

Die Auflösung von (15a) nach α_0 für den Fall mehrerer Wertepaare (g_1, g_2) mit Hilfe einer erweiterten Hillschen Determinantenmethode ist zwar möglich, aber schwierig. Wir erkennen aber, daß (15a) die Wurzeln $\alpha_0 = \pm \gamma_0$, $-\tau_g \pm \gamma_g$ usw. hätte, wenn $q = 0$ wäre. Nach (12) ist nun q der Quotient aus dem mittleren Potential \bar{V} des Kristalls und der Energie E der ankommenden Elektronenstrahlung. Nach den bisherigen experimentellen Ergebnissen¹⁾ liegt \bar{V} zwischen

1) Vgl. z. B. G. J. Finch u. H. Wilman, *Ergeb. d. ex. Naturw.* 16. S. 392. 1937.

4 Volt und 21 Volt. Setzen wir etwa $\bar{V} = 10$ Volt, $E = 40$ kV, so wird

$$q = 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

Es liegt daher der Versuch nahe, die Lösung für α_0 in Form einer Potenzreihe von q anzusetzen. Setzen wir etwa

$$(26) \quad \alpha_0 = -\tau_g \pm \gamma_g + Aq + Bq^2 + \dots$$

in (15a) ein, so erhalten wir, da $\gamma_0 = \gamma$ ist,

$$\begin{vmatrix} -\gamma_g \pm \gamma_g^2 - \gamma^2 + [2A(-\tau_g \pm \gamma_g) - 1]q + \dots & -a_{-g}q & -a_{-h}q \\ -a_gq & (\pm 2A\gamma_g - 1)q + (A^2 \pm 2B\gamma_g)q^2 + \dots & -a_{g-h}q \\ -a_hq & -a_{h-g}q & (\tau_h - \tau_g \pm \gamma_g)^2 - \gamma_h^2 + \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickeln wir die Determinante, so liefert die Forderung, daß die Koeffizienten von q und q^2 verschwinden (zweckmäßig werden die Zeilen, bis auf die zweite, durch das Diagonalglied dividiert):

$$2A\gamma_g = \pm 1$$

$$A^2 \pm 2B\gamma_g = \sum_{h \neq g} \frac{a_{g-h}a_{h-g}}{(\tau_h - \tau_g \pm \gamma_g)^2 - \gamma_h^2}.$$

Damit sind A und B bestimmt. Der Ansatz wird aber in der angegebenen Form unbrauchbar, wenn

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{oder} & 1. \gamma_0^2 = \gamma^2 \\ \text{oder} & 2. \gamma_g^2 \\ \text{oder} & 3. (-\tau_g \pm \gamma_g)^2 - \gamma^2 \\ \text{oder} & 4. (\tau_h - \tau_g \pm \gamma_g)^2 - \gamma_h^2 \end{array} \right\} \text{ von der Größenordnung } q \text{ werden.}$$

Sehen wir von diesen Ausnahmefällen zunächst ab, so erkennen wir, daß die Lösungen α_{0i} stets reell sind, solange die γ_g reell sind, solange also $(\alpha + \varphi_g)^2 + (\beta + \sigma_g)^2 < 1$ ist, und daß ferner ein Einfluß des inneren Potentials über den in q steckenden Durchschnittswert \bar{V} hinaus sich erst in der zweiten Näherung (Glied mit q^2) bemerkbar macht. Anders ist es in den „Ausnahmefällen“. Hier kann, wie wir sehen werden, die Abhängigkeit vom inneren Potential schon in der ersten Näherung auftreten, und ebenso können bei reellen γ_g unter Umständen komplexe α_{0i} und damit uneigentliche, räumlich gedämpfte Wellen auftreten. Gerade diese „Ausnahmefälle“ sind wichtig.

Bei nicht gar zu flachem Einfall des Strahles ist sicher $\gamma^2 \gg q$ ($\gamma = \sqrt{q}$ würde für $q = 2,5 \cdot 10^{-4}$ einem Einfallswinkel von $89^\circ 6'$ entsprechen). Nur für den Fall der Interferenztotalreflexion (Braggfall) an Netzebenen parallel zur Grenzebene und der dazu gehörigen

Kikuchikegel wird γ von der Größenordnung τ_g , also der Ordnung c . Da allgemein

$$\lambda = \frac{1,22 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{E}} \text{ cm } (E \text{ in Volt gemessen}),$$

und da $b_3^{(2)}$ etwa 10^{+8} cm beträgt, so wird

$$\lambda b_3^{(2)} = c \approx \frac{12,2}{\sqrt{E}}.$$

Andrerseits ist nach (12)

$$q = \frac{\bar{V}}{E}.$$

Daher wird

$$\frac{q}{c^2} = \zeta \approx \frac{\bar{V}}{150}.$$

Da, wie schon gesagt, \bar{V} einige wenige Volt beträgt, so dürfen wir selbst in diesen extremen Fällen meist ζ als klein gegen 1 und γ^2 als klein gegen q ansehen. (Es ist übrigens zu beachten, daß ζ nicht von der Geschwindigkeit der ankommenden Elektronen abhängt.)

Damit ist die Entwicklung von κ_0 nach Potenzen von q , wie sie im folgenden vorgenommen werden soll, gerechtfertigt, und zugleich sind ihre Grenzen aufgezeigt.

Was nun die oben genannten vier „Ausnahmefälle“ angeht, so ist folgendes zu sagen. Fall 1 betrifft streifende Inzidenz; auf ihn werde hier nicht eingegangen. Fall 2 führt, wie v. Laue gezeigt hat, auf die Kikuchi-Enveloppen; er wird im folgenden behandelt. Fall 3 bezieht sich auf die einfache Interferenzreflexion (Bragg- und Lauefall) und auf die Kikuchilinien. Fall 4 enthält den von Renninger¹⁾ experimentell behandelten Fall der Umwegenregung, geht aber über ihn hinaus, und zwar deswegen, weil es hier nur darauf ankommt, daß die Differenz $(\gamma_h - \tau_h)^2 - (\gamma_g - \tau_g)^2$ von der Größenordnung q wird, während nicht gefordert wird, daß sich $(\gamma_g - \tau_g)^2$ auch von γ^2 nur um Beträge der Ordnung q unterscheidet. Die eigentliche Umwegenregung wird von Fall 3 mit umfaßt, und zwar dann, wenn die Relation für zwei oder mehr Wertetripel g gleichzeitig gilt. Es läßt sich dann rechnerisch zeigen, daß der Reflex an einer Netzebene, der für sich allein verschwindende Breite und daher auch verschwindende Intensität hat, bei geeignetem Azimut durch das Eingreifen einer zweiten Netzebene relativ stark werden kann. Doch soll das ebenso wie Fall 4 erst bei späterer Gelegenheit genauer untersucht werden.

1) M. Renninger, Ztschr. f. Phys. 106. S. 141. 1937.

Interferenzreflexion (Bragg- und Lauefall) und Kikuchilini

Die Rechnung für einfache Interferenzreflexion ist bekannt und werde hier nur angedeutet. Es muß für ein bestimmtes Zahlen-
tripel g und nur für dieses $(\pm \gamma_g - \tau_g)^2 - \gamma^2$ oder auch $(\gamma + \tau_g)^2 - \gamma_g^2$
von der Ordnung q sein. Da nach (11) γ_g wesentlich positiv ist,
setzen wir

$$(28) \quad \begin{cases} \gamma + \tau_g = \gamma_1 \\ \gamma_g = |\gamma_1 + f q|. \end{cases}$$

f ist von der Ordnung 1. Der Reihenansatz (26) zur Lösung von (15a)
führt nun wie oben zu linearen Bestimmungsgleichungen für die
Koeffizienten aller Lösungen α_{0i} bis auf eine, nämlich bis auf

$$\alpha_0 = \gamma + A_1 q + A_2 q^2 + \dots$$

In diesem Fall ist q^2 die niedrigste bei der Entwicklung von (15a)
auftretende Potenz von q . Das Verschwinden ihres Koeffizienten
führt auf

$$(2A_1 \gamma - 1)(2A_1 \gamma_1 - 2f \gamma_1 - 1) - a_g a_{-g} = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(29) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4\gamma\gamma_1} (2\gamma\gamma_1 f + \gamma + \gamma_1), \\ B = \frac{1}{4\gamma\gamma_1} \sqrt{(2f\gamma\gamma_1 + \gamma - \gamma_1)^2 + 4\gamma\gamma_1 a_g a_{-g}}, \end{cases}$$

so wird

$$(29a) \quad A_1 = A \pm B,$$

$$(29b) \quad \begin{cases} \alpha_{01} = \gamma + (A + B)q + \dots \\ \alpha_{02} = \gamma + (A - B)q + \dots \end{cases}$$

Hier hängen also schon die Glieder erster Näherung vom inneren
Potential ab.

Gl. (29a) stimmt mit der Formel (24) bei v. Laue¹⁾ überein.
Es liegt der Laue- bzw. Braggfall vor, je nachdem ob $\gamma_1 \geq 0$ ist. Die
übrigen Grundlösungen für α_0 haben die oben angegebene Form (26).
Nunmehr finden wir aus den Gl. (14) für die Amplitudenverhältnisse
(bei Beschränkung auf die Glieder höchster Ordnung)

$$\frac{\psi_g^{(1)}}{\psi_0^{(1)}} = \frac{2\gamma(A+B) - 1}{a_{-g}}, \quad \frac{\psi_g^{(2)}}{\psi_0^{(2)}} = \frac{2\gamma(A-B) - 1}{a_{-g}},$$

während alle übrigen Verhältnisse $\psi_h^{(i)} : \psi_0^{(i)}$ von der Größenordnung q
sind. Die Berechnung der Amplituden aus (23) wird nun ebenfalls

1) M. v. Laue, Ergebnisse d. ex. Naturwiss. 10. S. 156. 1931.

so vorgenommen, daß wir uns auf die Glieder niedrigster Ordnung beschränken. Die Rechnung ist elementar und soll hier übergangen werden. Sie führt zu den aus der Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen bekannten Ergebnissen. Insbesondere erhalten wir, wenn wir die wieder ins Vakuum tretenden Intensitäten berechnen, den bekannten Intensitätsabfall zu beiden Seiten der Interferenzmitte und ferner die von den Ewaldschen Pendellösungen her bekannten Schwebungserscheinungen.

Insbesondere sind die Überlegungen und Rechnungen, die v. Laue¹⁾ zur Erklärung der Kosselkegel gegeben hat, in unveränderter Form gültig. v. Laue geht dabei von dem Reziprozitätssatz aus, der besagt, daß, wenn ein aus bestimmter Richtung auf den Kristall auftreffender Strahl an den Stellen der Gitterpunkte (oder an sonstigen Atomorten) im Kristall eine stärkere (bzw. schwächere) Erregung hervorruft als ein aus einer Nachbarrichtung einfallender anderer Strahl, umgekehrt nach dem Reziprozitätssatz auch bei Erregung der Atome durch andere Ursachen nach dieser Richtung hin besonders starke (schwache) Ausstrahlung erfolgt. Bei beliebigem Einfall des Strahles haben nun, wie sich leicht zeigen läßt, in der Regel im Kristall außer einem Strahl, der im wesentlichen die Fortsetzung des einfallenden bildet, alle anderen nur Intensitäten von der Ordnung q^2 . In dem vorstehend behandelten Fall (27,3) ergeben sich dagegen im Kristall zwei Wellen mit Intensitäten von der Ordnung 1. Dieser Umstand hat zur Folge, daß es Stellen besonders starker und besonders schwacher Erregung im Kristall gibt, die in jeder Zelle an entsprechenden Stellen liegen. Fallen diese Stellen an Atomorte, so ist nach dem Reziprozitätssatz bei sonstiger Erregung der Atome die Aussendung starker (bzw. schwacher) Intensität in der betreffenden Richtung zu erwarten.

Ist der Wellenvektor des einfallenden Strahles

$$\mathfrak{K} = \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda} \right),$$

so ist Bedingung (28) in nullter Näherung (für $q = 0$) identisch mit

$$(\mathfrak{K} + b_g)^2 = \mathfrak{K}^2$$

oder

$$(30) \quad 2(\mathfrak{K} b_g) + b_g^2 = 0.$$

Die Richtungen, in denen eine bevorzugte Ausstrahlung statt hat, erfüllen den Mantel eines Kegels, der b_g als Achse hat. v. Laue hat die Entstehung dieser „Kosselkegel“ bei Röntgenstrahlung ausführlich diskutiert und insbesondere auch gezeigt, warum z. B. beim

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. [5] 23. S. 724. 1935; 28. S. 528. 1937.

Cu-Kristall paarweise je eine helle und eine dunkle Linie auftreten. Er hat weiter bewiesen, daß der Reziprozitätssatz auch für Materiestrahlung gültig ist und damit auch die Entstehung der Kikuchikegel bei Elektronenstrahlung erklärt. Auch hier kann es, je nach den besonderen Verhältnissen, helle und dunkle Kikuchilinen geben.

Breite der Kikuchilinen

Wir definieren zu der durch b_g festgelegten Netzebene eine „Braggsche Einfallsrichtung“ im Vakuum mit dem Wellenvektor \mathfrak{K}_B dadurch, daß für sie (30) exakt gelten soll. Der halbe Öffnungswinkel des Kegels bestimmt sich dann aus

$$\cos \Theta_B = - \frac{(\mathfrak{K}_0 b_g)}{\frac{1}{\lambda} |b_g|} = \frac{1}{2} \lambda |b_g|.$$

Dagegen erhalten wir als Ort des durch (28) erklärten Ausbreitungsvektors \mathfrak{K} wegen der Größe f einen Kegel, für dessen Öffnung ein gewisser Spielraum besteht. Bedeutet \mathfrak{z} einen Einheitsvektor in der Z-Richtung, so ist (28) identisch mit

$$\mathfrak{K}^2 = \left(\mathfrak{K} + b_g + f \cdot \mathfrak{z} \cdot \frac{q}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \mathfrak{K}^2.$$

Bei Vernachlässigung der Glieder mit q^2 erhalten wir

$$2(\mathfrak{K} b_g) + b_g^2 + 2 \frac{f}{\lambda} \cdot q \cdot (\mathfrak{K} + b_g, \mathfrak{z}) = 0.$$

Der Winkel zwischen \mathfrak{K} und b_g sei Θ . Dann ist

$$\cos \Theta = - \frac{(\mathfrak{K} b_g)}{\frac{1}{\lambda} |b_g|} = \frac{1}{2} \lambda |b_g| + f q \frac{(\mathfrak{K} + b_g, \mathfrak{z})}{|b_g|}.$$

Daher

$$\cos \Theta_B - \cos \Theta = - f q \frac{\gamma + \varepsilon_g}{\lambda |b_g|} = (\Theta - \Theta_B) \cdot \sin \Theta_B$$

oder, da

$$\lambda |b_g| = 2 \cos \Theta_B,$$

$$(31) \quad \Theta = \Theta_B - \frac{\gamma + \varepsilon_g}{\sin 2 \Theta_B} \cdot f q.$$

Wenn es sich um den Braggfall handelt, können wir als „Breite der Kikuchi-Linie“ denjenigen Schwankungsbereich $\Delta \Theta$ definieren, innerhalb dessen wir im Bereich der Interferenztotalreflexion bleiben. Für diesen Bereich wird B in (29) imaginär, und f muß zwischen bestimmten Grenzen liegen, die sich aus (29) ergeben. Die Schwankungsmöglichkeit für f ist dabei

$$\Delta f = \sqrt{-\frac{4 a_g a_{-g}}{\gamma \gamma_1}}. \quad (\gamma_1 < 0).$$

Daher wird der Schwankungsbereich für Θ oder die Breite der Kikuchilinie

$$(32) \quad \Delta \Theta = \frac{2}{\sin 2 \Theta_B} \cdot \sqrt{a_g a_{-g} \frac{|\gamma + \tau_g|}{\gamma}} \cdot q.$$

Für die Kikuchilinen, die dem Lauefall entsprechen, gilt (32) ebenfalls; nur bestimmt Δf jetzt die Halbwertsbreite, d. h. den Abstand der Richtungen, in denen die Intensität der Welle \mathfrak{R}_g im Kristall auf die Hälfte ihres Maximalbetrages gesunken ist. $\Delta \Theta$ ist dementsprechend die Halbwertsbreite der Kikuchilinie.

Kikuchi-Enveloppen

In der rein kinematischen Theorie (d. h. für $q = 0$) ist die Gleichung der Kikuchikegel durch (30) gegeben. Nach (28) können wir sie auch in der Form schreiben

$$\gamma_g^2 = (\gamma + \tau_g)^2.$$

Betrachten wir nun alle Kikuchilinen, für die g_1 und g_2 übereinstimmen, während g_3 durch $g_3 + n$ ersetzt wird (n beliebig). γ_g bleibt in diesem Falle ungeändert; an Stelle von τ_g tritt $\tau_g + nc$. Die Gleichungen der Kikuchilinen werden dann

$$(33) \quad \gamma_g^2 = (\gamma + \tau_g + nc)^2.$$

Die Enveloppe aller dieser Kikuchilinen für verschiedenes n erhalten wir dadurch, daß wir (33) nach n differenzieren

$$(34) \quad \gamma + \tau_g + nc = 0$$

und aus (33) und (34) n eliminieren. Das liefert

$$(35) \quad \gamma_g = 0.$$

Die Enveloppe ist also der Ort derjenigen Strahlen \mathfrak{R} , zu denen ein in die Grenzebene fallender Strahl \mathfrak{R}_g gehört. Diese Beziehung ist zuerst durch v. Laue¹⁾ hergeleitet worden.

In der dynamischen Theorie wird (35) nur angenähert zutreffen. Wir werden daher untersuchen, was eintritt, wenn γ_g sehr klein wird. Wir betrachten den Fall, daß nur zwei Gruppen von Netzebenen in Betracht kommen, nämlich die durch die Zahlentripel $(0, 0, n)$ und (g_1, g_2, n) gekennzeichneten; n läuft dabei von $-\infty$ bis $+\infty$. Die Annahme entspricht dem Ansatz (25); in τ_g selbst mag dabei $g_3 = 0$ sein.

γ_g^2 muß nach (11) stets reell sein. Der Fall, daß γ_g^2 sehr klein und positiv ist, liefert reelle Werte für α_{0i} , also keine auf

1) M. v. Laue, Phys. Ztschr. 37. S. 544. 1936.

die Grenzfläche beschränkte Erscheinung. Wir wollen daher annehmen, daß γ_g^2 sehr klein und negativ ist, d. h. also, daß die ins Vakuum zurückgehende, gebeugt-reflektierte Welle gerade nicht mehr zustande kommt. Es sei

$$(36) \quad \gamma_g^2 = -p \cdot q - r \cdot q^2.$$

p und r sind reelle Zahlen; $p > 0$.

Im vorliegenden Fall (2 Wertepaare g_1, g_2) hat, wie schon oben (I S. 188) gezeigt, die Gl. (15a) genau vier unabhängige (nicht um ganzzahlige Vielfache von c verschiedene) Grundlösungen. Die erste finden wir durch einen Ansatz der Form (26) zu

$$\begin{aligned} \kappa_{01} = & \gamma + \frac{q}{2\gamma} \\ & + \frac{q^2}{2\gamma} \cdot \left\{ -\frac{1}{4\gamma^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n a_{-n}}{n^2 c^2 - 4\gamma^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_{g+n} a_{-g-n}}{(\gamma + \tau_g + n c)^2} \right\} + \dots \end{aligned}$$

κ_{02} ergibt sich hieraus dadurch, daß wir γ durch $-\gamma$ ersetzen. Zur Ermittlung der beiden anderen Grundlösungen setzen wir

$$\kappa_0 = -\tau_g + B_1 q^{1/2} + B_2 q + B_3 q^{3/2} + \dots$$

Die Diagonalglieder von (15a) werden sämtlich von der Ordnung τ_g^2 bzw. γ^2 bis auf das eine Glied

$$\begin{aligned} (\kappa_0 + \tau_g)^2 - \gamma_g^2 - q = & (B_1^2 - 1 + p)q + 2B_1 B_2 q^{3/2} \\ & + (B_2^2 + 2B_1 B_3 + r)q^2 + \dots \end{aligned}$$

Beim Auswerten der Determinante kommen Glieder mit q und mit $q^{1/2}$ nur einmal vor; das liefert (für $p > 1$)

$$B_1 = \mp i \sqrt{p-1}; \quad B_2 = 0.$$

Aus dem Verschwinden des Koeffizienten von q^2 folgt

$$2B_1 B_3 + r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_{g+n} a_{-g-n}}{(\tau_g + n c)^2 - \gamma^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{-n}}{n^2 c^2}.$$

Die Konvergenz der beiden unendlichen Reihen auf der rechten Seite ist durch (4c) gesichert. Nennen wir ihre Summe S , so wird

$$(37b) \quad \left. \begin{matrix} \kappa_{03} \\ \kappa_{04} \end{matrix} \right\} = -\tau_g \mp i \sqrt{p-1} q^{1/2} \pm i \frac{S-r}{2\sqrt{p-1}} \cdot q^{1/2} + \dots$$

Wir nehmen hier zunächst $p > 1$ an. Über den Fall $p \leq 1$ ist unten die Rede. Die Wellenfunktion ψ ist durch (25) gegeben. Wir müssen nun zunächst für jede der vier Grundlösungen κ_{0i} die Verhältnisse $\psi_n^{(i)} : \psi_0^{(i)}$ berechnen, und zwar aus den Gl. (14) bzw. durch Bilden der Unterdeterminanten von (15a). Für κ_{01} nehmen wir

zweckmäßig die Unterdeterminanten zu den Elementen derjenigen Zeile, die das Glied $\kappa_0^2 - \gamma^2 - q$ enthält. Wir erhalten bei Beschränkung auf die jeweils niedrigsten Potenzen von q

$$(38a) \quad \psi_0^{(1)} : \psi_n^{(1)} : \psi_{g+n}^{(1)} = 1 : \frac{a_n q}{(\gamma + nc)^2 - \gamma^2} : \frac{a_{g+n} q}{(\gamma + \tau_g + nc)^2}.$$

Die Verhältnisse $\psi_0^{(2)} : \psi_n^{(2)} : \psi_{g+n}^{(2)}$ erhalten wir aus (38a) dadurch, daß wir γ durch $-\gamma$ ersetzen.

Um die Amplitudenverhältnisse für κ_{03} und κ_{04} zu finden, benutzen wir am einfachsten die Unterdeterminanten zu den Elementen der Zeile, die das Glied $(\kappa_0 + \tau_g)^2 - \gamma_g^2 - q$ enthält. Wir erhalten ähnlich wie oben

$$(38b) \quad \psi_0^{(3)} : \psi_n^{(3)} : \psi_{g+n}^{(3)} = \frac{a_{-g} q}{\tau_g^2 - \gamma^2} : \frac{a_{-g+n} q}{(\tau_g - nc)^2 - \gamma^2} : 1 : \frac{a_n q}{n^2 c^2}.$$

Für κ_{04} ergeben sich in der hier benutzten Näherung dieselben Verhältnisse.

Wir haben nun folgende Sachlage. Zu jeder der vier Grundlösungen κ_{0i} gehören als weitere Lösungen

$$\kappa_{ni} = \kappa_{0i} + nc \quad \text{und} \quad \kappa_{g+n,i} = \kappa_{0i} + \tau_g + nc.$$

Aus den errechneten Amplitudenverhältnissen (38) ersehen wir, daß in jeder Gruppe von Wellen eine alle andern überragt (im Verhältnis 1:q). Die stärksten Anteile jeder Gruppe besitzen die zu κ_{01} , κ_{02} , κ_{g3} , κ_{g4} gehörigen Wellen. Davon geht die zu κ_{01} ($\approx \gamma$) gehörige in den Kristall hinein; die zu κ_{02} gehörige kommt aus ihm heraus. Zu κ_{g3} gehört eine räumlich gedämpfte, zu κ_{g4} eine räumlich exponentiell zunehmende Welle.

Wir betrachten nun einen unendlich dicken Kristall. Dann dürfen wir den Ansatz $\psi_0^{(2)} = \psi_g^{(4)} = 0$ machen. Denn dieser Ansatz ist physikalisch sinnvoll, weil von den übrigbleibenden Wellen die eine (κ_{01}) in den Kristall hineingeht, die andere (κ_{g3}) räumlich gedämpft ist, und er ist formal möglich, weil wir mit ihm die Grenzbedingungen (23) erfüllen können.

Die Wellenfunktion der ins Vakuum gebeugt-reflektierten Welle $\mathfrak{K}_g^{(a)}$ ist nach (19)

$$q_g \cdot e^{-\frac{j}{\lambda} (\alpha_g x + \beta_g y - \gamma_g z)}.$$

γ_g ist nach (36) imaginär. Die Welle muß nun im Vakuum ($z < 0$) räumlich gedämpft sein; also muß γ_g negativ imaginär sein, daher

$$(39) \quad \gamma_g = -i\sqrt{p} \cdot q^{1/2} - i\frac{r}{2\sqrt{p}} q^{3/2} \dots$$

Die Grenzbedingungen (23) liefern nunmehr

$$\sum_n (\gamma + \alpha_{01} + nc) \psi_n^{(1)} + \sum_n (\gamma + \alpha_{03} + nc) \psi_n^{(3)} = 2\gamma,$$

$$\sum_n (\gamma_g + \alpha_{01} + \tau_g + nc) \psi_{g+n}^{(1)} + \sum_n (\gamma_g + \alpha_{03} + \tau_g + nc) \psi_{g+n}^{(3)} = 0.$$

Setzen wir die Werte der α_{0i} aus (37) und die der Amplitudenverhältnisse aus (38) ein, so erhalten wir bei Beschränkung auf die Glieder mit den jeweils niedrigsten Potenzen von q :

$$(40) \quad \begin{cases} \psi_0^{(1)} = 1, \\ \psi_g^{(3)} = -i q^{1/2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_{g+n}}{(\gamma + \tau_g + nc) (\sqrt{p} + \sqrt{p-1})}. \end{cases}$$

Damit wird die Wellenfunktion Ψ im Kristall, bei Beschränkung auf Glieder der Ordnungen 1 und $q^{1/2}$

$$\Psi = e^{-\frac{j}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} \left[e^{-\frac{j}{\lambda} \alpha_{01} z} - \frac{i q^{1/2}}{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} \cdot \sum_n \frac{a_{g+n}}{\gamma + \tau_g + nc} \cdot e^{-\frac{j}{\lambda}(\sigma_g x + \sigma_g y) - \frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{p-1} q^{1/2} \dots) z} \dots \right].$$

Mit wachsendem z verschwindet der zweite Summand der Klammer, und es wird $|\Psi|^2 = 1$. Für Punkte der Oberfläche dagegen ($z = 0$) wird, wenn wir noch

$$a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$$

setzen:

$$(41) \quad \begin{cases} |\Psi|^2 = 1 - \frac{2q^{1/2}}{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} \\ \cdot \sum_n \frac{|a_{g+n}|}{\gamma + \tau_g + nc} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sigma_g x + \sigma_g y) - i\theta_{g+n} \right] \dots \end{cases}$$

Wir erhalten also für die Punkte der Oberfläche eine von dem Durchschnittswert 1 abweichende Erregung, und zwar ist es hier ganz ähnlich wie bei dem Ergebnis, das v. Laue zur Erklärung der Kossel- und Kikuchikegel benutzt: der Wert der Erregung ist eine periodische Funktion des Ortes und besitzt die Periode des Gittergitters. Wenn daher an der Stelle eines Gitterpunktes (oder sonstigen Atomortes) eine starke Erregung auftritt, so ist das an allen entsprechenden Orten des Gitters der Fall.

Werden die Atome nun durch andere Ursachen erregt, so haben wir nach dem Reziprozitätssatz umgekehrt eine stärkere Ausstrahlung

nach diesen Richtungen und damit das Entstehen der Kikuchi-Enveloppen zu erwarten. Damit ist zunächst diese Entstehung durch inkohärente Elektronenstreuung grundsätzlich erklärt, und zwar in Übereinstimmung mit der Folgerung v. Laues, daß es sich bei ihnen um einen Effekt der Oberflächenschicht handelt. Aus (41) lassen sich nun noch einige bemerkenswerte Folgerungen ziehen. Was zunächst die Größenordnung des zweiten Summanden betrifft, so ist folgendes zu sagen. τ_g und γ sind beide von der Ordnung c ; daher

ist $\frac{q^{1/2}}{(\gamma + \tau_g + n c)}$ von der Ordnung $\zeta^{1/2} = \sqrt{\frac{\bar{V}}{150}}$ (vgl. II S. 228). Die Tatsache, daß ζ an sich keine gar zu kleine Größe ist, setzt einerseits der ganzen hier befolgten Methode der Reihenentwicklung nach Potenzen von ζ von vornherein relativ enge Grenzen; sie bewirkt aber andererseits auch, daß der zweite Summand in (41) verhältnismäßig beträchtlich ist, daß daher $|\Psi|^2$ prozentual beträchtlich von dem Durchschnittswert 1 abweicht, und daraus erklärt es sich, daß die Enveloppe überhaupt zustande kommt. Würden wir dieselbe Entwicklungsmethode auf Röntgeninterferenzen anwenden, so wäre die dem ζ entsprechende Entwicklungsgröße sehr erheblich kleiner, und die rechte Seite von (41) würde kaum von 1 abweichen. Damit steht die Tatsache in guter Übereinstimmung, daß es bei Röntgenstrahlen zwar die den Kikuchikegeln entsprechenden Kosselkegel gibt, aber keine entsprechenden Enveloppen.

$|\Psi|^2$ wird um so kleiner, je größer p wird. Den größten Wert erreicht es für $p = 1$. Freilich verliert die hier gegebene Ableitung für $p = 1$ ihre Gültigkeit, weil in κ_{03} der Faktor $\sqrt{p-1}$ im Nenner auftritt. Es läßt sich aber die ganze Rechnung auch mit dem Ansatz

$$p = 1; \quad \gamma_g^2 = -q - r q^2; \\ \kappa_{03} = -\tau_g + B_1 q + B_2 q^2 + \dots$$

durchführen. Der Dämpfungsfaktor der eindringenden Welle nimmt dann zwar einen anderen Wert an; auch unterliegt r gewissen Bedingungen, wenn gedämpfte Wellen entstehen sollen. Wird aber κ_{03} komplex, so stimmt das Endergebnis mit (41) überein, nur daß an die Stelle von $\sqrt{p} + \sqrt{p-1}$ einfach der Faktor 1 tritt. Für $p = 1$ hat also $|\Psi|^2$ seinen größten Wert. Unmittelbar danach treten andere Verhältnisse ein. Für $p < 1$ werden nämlich beide Wurzeln κ_{03} und κ_{04} nach (37b) reell, und wir erhalten keine gedämpften, auf die Oberflächenschicht beschränkten Wellen mehr, sondern neben der eindringenden Hauptwelle mehrere Wellenzüge, die fast parallel zur Oberfläche verlaufen. Die Erscheinung schwankt stark mit der

Kristalldicke, doch ist die Abweichung der Erregung der Oberflächenpunkte von dem Mittelwert 1 im Durchschnitt null. Für $p < 1$ werden wir daher nach dem Reziprozitätssatz die Erzeugung von Enveloppen nicht zu erwarten haben. Danach sollte ein Schnitt durch die Envelope in der Regel das Bild ergeben, daß sie auf der einen Seite ihre größte Intensität besitzt und danach plötzlich abbricht, während sie auf der andern Seite langsamer an Stärke verliert. Wir kommen darauf noch zurück.

Über das Vorzeichen des zweiten Gliedes in (41) läßt sich von vornherein nichts aussagen. Es könnte auch negativ sein; die Existenz schwarzer Enveloppen ist danach möglich. Wir sollten sogar erwarten, daß das Vorzeichen bei Änderung von γ sich in dem Augenblick plötzlich ändert, wo $\gamma + \tau_g$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von c wird. Indes hat die ganze obige Herleitung zur Voraussetzung, daß $\gamma + \tau_g + nc$ für alle n von größerer Ordnung als $q^{1/2}$ ist, also der Null nicht zu nahe kommt.

Den Sonderfall, daß $\gamma + \tau_g$ doch in der Nähe eines ganzzahligen Vielfachen von c liegt, müssen wir jetzt noch betrachten. Die Rechnung ist im wesentlichen die gleiche wie vorher. Wir nehmen

$$(42) \quad \begin{cases} \gamma = mc - \tau_g + f q^{1/2}, \\ \gamma^2 = -pq - r q^2 \quad (p > 1). \end{cases}$$

Der Ansatz

$$x_0 = mc - \tau_g + B_1 q^{1/2} + B_2 q + \dots$$

bewirkt, daß in (15a) zwei Diagonalglieder von kleinerer Ordnung als 1 werden, nämlich

$$x_0^2 - \gamma^2 - q = 2(mc - \tau_g)(B_1 - f)q^{1/2} \dots$$

und

$$(x_0 + \tau_g - mc)^2 - \gamma^2 - q = (B_1^2 + p - 1)q \dots$$

Wir erhalten für B_1 die kubische Gleichung

$$(B_1 - f)(B_1^2 + f - 1) = 0$$

und daraus drei Grundlösungen x_{0i} . Die vierte liefert der Ansatz $x_{04} = -\gamma - \dots$ Das gibt in erster Näherung

$$(43) \quad \begin{cases} x_{01} = mc - \tau_g + f q^{1/2} + \dots \\ x_{02}, x_{03} = mc - \tau_g \mp i \sqrt{p-1} q^{1/2} + \dots \\ x_{04} = -(mc - \tau_g) - f q^{1/2} \dots \end{cases}$$

Die weiteren Schritte und Überlegungen sind denen, die zu (40) und (41) führten, vollkommen gleich. Wir ermitteln zunächst die Amplitudenverhältnisse $\psi_n^{(i)} : \psi_0^{(i)}$, vernachlässigen dann für einen

genügend dicken Kristall die zu α_{03} und α_{04} gehörigen Wellen (sie entsprechen den früheren α_{04} und α_{02}) und setzen die Grenzbedingungen (23) an. Diese liefern aber, anders als früher, wenn wir uns wieder auf die Glieder mit den niedrigsten Potenzen von q allein beschränken:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{zu } \alpha_{01} \text{ gehörig,} \\ \text{also ungedämpft:} \end{array} \right. \quad \psi_0^{(1)} = 1 \quad \text{und} \quad \psi_{g-m}^{(1)} = \frac{a_{g-m}}{f^2 + p - 1},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zu } \alpha_{02} \text{ gehörig,} \\ \text{also gedämpft:} \end{array} \right. \quad \psi_{g-m}^{(2)} = - \frac{(\sqrt{p} + i f) a_{g-m}}{(\sqrt{p} + \sqrt{p-1})(f^2 + p - 1)}.$$

Alle übrigen Amplituden sind von kleinerer Ordnung.

Dieses Ergebnis ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert. Zunächst fällt auf, daß auf der rechten Seite an Stelle der früheren unendlichen Summe ein einzelnes Glied steht, daß also als einzige Potentialgröße der Koeffizient a_{g-m} vorkommt. An sich müssen wir erwarten, daß die Enveloppe durch das Zusammenwirken aller Netzebenen mit gleichen g_1 und g_2 entsteht, und dem entspricht ja auch durchaus die Gl. (41). Hier nun ist γ nahezu gleich dem Wert $mc - \tau_g$. Die genaue Übereinstimmung würde nach (34) die Stelle bestimmen, wo die geometrische Enveloppe den geometrischen Kikuchikegel ($g_1, g_2, g_3 - m$) berührt. Der wirkliche Kegel kommt hier der Enveloppe am nächsten; es ist daher verständlich, daß die den Kegel bestimmende Netzebene auch die Wirkung der andern Netzebenen auf die Enveloppe überwiegt. Wäre a_{g-m} sehr klein, so müßten wir unsere Näherung weiter treiben.

Zweitens aber, und das ist noch wichtiger, sind die in (44) neben $\psi_0^{(1)}$ auftretenden Amplituden von derselben Größenordnung wie $\psi_0^{(1)}$ selbst. Die Wellenfunktion im Kristall ergibt sich aus (25) Für die Punkte der Oberfläche ($z = 0$) ergibt sich danach, wenn wir wieder $a_{g-m} = |a_{g-m}| e^{i\theta_{g-m}}$ und außerdem

$$\sqrt{p-1} - if = \sqrt{f^2 + p - 1} \cdot e^{i\mu}$$

setzen.

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\psi|^2 = 1 + \frac{|a_{g-m}|^2}{(f^2 + p - 1)(\sqrt{p} + \sqrt{p-1})^2} \\ \quad + \frac{2|a_{g-m}|}{\sqrt{f^2 + p - 1}(\sqrt{p} + \sqrt{p-1})} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\sigma_g x + \sigma_g y) - \theta_{g-m} - \mu \right]. \end{array} \right.$$

Entsprechende Punkte sämtlicher Gitterzellen der Oberfläche werden also wieder gleich stark erregt. Daraus folgt ebenso wie früher bei Erregung der Atome aus andern Ursachen nach dem Reziprozitätssatz starke Ausstrahlung nach den Richtungen, die zu Punkten der

Envelope führen. Anders als früher ist aber nach (45) der Überschuß von $|\Psi|^2$ über den Durchschnittsbetrag 1 nicht mehr von der Ordnung $q^{1/2}$, sondern von der Ordnung 1. Das bedeutet, daß die Enveloppen an den Stellen, wo die Kegel in sie münden, in der Regel größere Intensität besitzen.

Zusammenfassend läßt sich über die gegenseitige Lage von Kikuchikegeln von Envelope folgendes aussagen. Während die rein

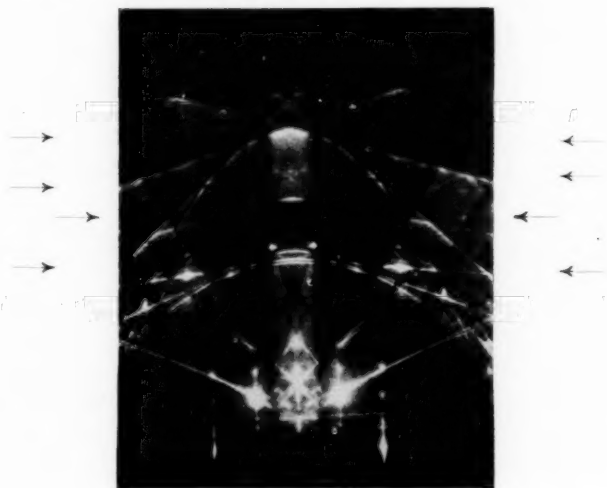


Abb. 1. Elektronenbeugung bei streifendem Einfall auf die (111)-Fläche von Flußspat.

Azimet 60° . $E = 50$ kV. (Nach einer Aufnahme von G. J. Finch)

geometrische Envelope (35) und die geometrischen Kegel (33) sich nach (34) in den Stellen $\gamma + \tau_g + mc = 0$ berühren, kommt zwischen den wirklichen Kegeln (28)

$$\gamma_g^2 = (\gamma + \tau_g + mc + fq)^2$$

und der wirklichen Envelope (36)

$$\gamma_g^2 = -pq - r q^2$$

ein reeller Berührungspunkt offenbar überhaupt nicht zustande. Betrachten wir etwa den Kegel, für den $n = 0$ ist, so kommt er der Envelope an der Stelle $\gamma + \tau_g = 0$ am nächsten. Beim Annähern an diese Stelle geht aber nach (32) die Breite und damit die Intensität der Kikuchilinie gegen null. Das heißt: Die wirklichen Kikuchi-Envelope sind gegen die geometrischen ein wenig

verschoben, so daß sie die Kikuchikegel nicht mehr berühren. Die Kikuchilinie erlischt kurz vor ihrer Einmündung in die Enveloppe. Die Enveloppen selbst sind zwischen 2 Einmündungsstellen von Kikuchilinen schwächer und erlangen in der Regel an den Einmündungsstellen größere Intensität. Auf einem Querschnitt durch die Enveloppe ist nach dem oben (II S. 237) Gesagten zu erwarten, daß die Intensität im allgemeinen nach der Seite der Kikuchilinen hin schärfer, nach der andern Seite hin allmählicher abfällt.



Abb. 2. Elektronenbeugung am Spinell.
 $E = 50 \text{ kV}$. (Nach einer Aufnahme von G. J. Finch)

Die in der Literatur vorliegenden Aufnahmen stimmen mit diesen Ergebnissen recht befriedigend überein. Abb. 1 stellt eine Aufnahme von G. J. Finch am Flußspat dar; besonders an den durch Pfeile hervorgehobenen Stellen erkennt man, daß die (einer nach unten geöffneten Parabel ähnliche) Enveloppe an den Einmündungsstellen der von rechts und links unten kommenden (geradlinigen) Kikuchilinen stärker wird, während die Linien selbst kurz vor der Einmündung erlöschen. In der Umgebung dieser Stellen ist überdies die Begrenzung der Enveloppe nach außen hin (also auf der den Kikuchilinen zugekehrten Seite) schärfer und nach innen hin verwaschener. Auch die darunter liegende Enveloppe läßt die Erscheinung erkennen, wenn auch weniger deutlich. Über-

haupt ist zu beachten, das einerseits die Rechnungen nur eine Näherung liefern, und daß andererseits die Erscheinungen selbst stark von den Werten der Potentialgrößen a_g abhängen, und daß sie durch das Eingreifen weiterer Netzebenen abgeändert werden können. In Abb. 2 (Elektronenbeugung am Spinell; ebenfalls von G. J. Finch) tritt die Erscheinung ebenfalls an den durch Pfeile bezeichneten Stellen hervor.

Die Indizierung der Enveloppen in Abb. 1 und in andern Aufnahmen von G. J. Finch am Flußspat¹⁾ zeigt übrigens, daß es sich in vielen Fällen *nicht* um Enveloppen handelt, die der Grenzfläche zugeordnet sind ($\gamma_g = 0$). Soweit an gut erkennbaren Enveloppen nachgeprüft werden konnte, gilt aber nach den Aufnahmen stets folgendes: für die Achsenvektoren b_g der Kikuchikegel, die zu einer beobachteten Enveloppe gehören, besteht die Beziehung $b_g = \bar{b} + c \cdot t$, wobei \bar{b} und c feste Vektoren sind, t ein Parameter. Ferner fallen sowohl \bar{b} wie auch die durch $[\bar{b}c]$ bestimmte Zonenachse der den Kegeln zugeordneten Netzebenen entweder in die Kristallgrenzfläche oder in eine andre Würfeläche oder in eine Fläche der Art $(\bar{1}10)$; c ist also normal zu der betreffenden Fläche. Das weist auf eine Entstehung der Enveloppen entweder in der Grenzfläche oder an einer Spaltfläche oder an sonstigen Fehlstellen im Kristallgitter hin, entsprechend der durch v. Laue²⁾ geäußerten Ansicht.

Herrn Prof. G. J. Finch danke ich herzlich für die freundliche Überlassung von Elektronenbeugungsbildern, Herrn Prof. M. v. Laue für eine Reihe wertvoller Anregungen.

1) G. J. Finch, A. G. Quarrel u. H. Wilman, Trans. Faraday Soc. 31. S. 1051. 1935.

2) M. v. Laue, Phys. Ztschr. 37. S. 546. 1936.

Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 13.

(Eingegangen 20. Januar 1938)

Die Meßbarkeit des quadratischen Dopplereffekts

Von O. Scherzer

(Mit 2 Abbildungen)

Für die Elektrodynamik bewegter Körper ist es wichtig zu wissen, ob die in einem bewegten System gemessene Lichtgeschwindigkeit 1. isotrop und 2. von der Bewegungsgeschwindigkeit unabhängig ist. Die erste Frage wird durch den Michelsonversuch mit großer Genauigkeit positiv entschieden. Die zweite Frage läuft darauf hinaus, ob eine materielle Schwingung, also etwa die Schwingung eines Pendels oder eines Atoms, sich bei Translationsbewegung des schwingenden Systems in gleichem Maße verzögert wie das Hin- und Herlaufen eines Lichtstrahls zwischen gleichförmig bewegten Spiegeln. Die Bejahung dieser Frage ist eines der Grundpostulate der speziellen Relativitätstheorie. Dieses Postulat ist bisher nicht experimentell bestätigt. Denn obgleich viele Folgerungen der speziellen Relativitätstheorie mit den Messungen in Einklang stehen und bisher kein Versuchsergebnis der Theorie widerspricht, scheint es nicht möglich, den Gleichlauf zwischen Lichtuhren und materiellen Uhren in bewegten Systemen aus den bisherigen Messungen in eindeutiger Weise zu folgern.

Die Bewegungsgeschwindigkeit der Erde reicht zur Prüfung der vorliegenden Frage nicht aus¹⁾. Dagegen stehen uns in den Kanalstrahlen hinreichend schnell bewegte schwingungsfähige Systeme zur Verfügung. Die bei ihnen von der Relativitätstheorie erwartete Verzögerung der Schwingungen ist unter dem Namen quadratischer oder transversaler Dopplereffekt bekannt; was der Messung dieses Effektes entgegensteht, ist meines Erachtens in erster Linie die weit verbreitete Behauptung, daß er unmeßbar klein sei. Diese Behauptung zu widerlegen ist der Zweck dieser Zeilen.

Damit der *lineare* Dopplereffekt nicht stört, muß man genau *senkrecht* zur Bewegungsrichtung beobachten. Den rechten Winkel

1) Bei dem letzten mir bekannt gewordenen Versuch, der sich in dieser Richtung ausbauen ließe (Wiederholung des Versuchs von Kennedy durch G. C. Omer u. J. L. Lawson, *Astrophys. J.* **84**, S. 477. 1936), ist die Meßgenauigkeit noch immer um zwei Zehnerpotenzen zu klein (Meßgenauigkeit $\sim 10^{-6}$, $\beta^2 \sim 10^{-8}$). Der Versuch prüft die Konstanz der Wellenlänge einer Spektrallinie und damit die Konstanz des Quotienten Atom-Schwingungszeit/Licht-Laufzeit.

wird man am sichersten spektroskopisch messen. Man erreicht dies dadurch, daß man zwei Kanalstrahlen in genau *entgegengesetzter* Richtung durch das Rohr schickt. Die Richtung der beiden Strahlen wie auch der einzelnen Kanalstrahlteilchen dürfte sich bei Verwendung von zwei Ionenlinsen und vier Blenden auf $\pm \frac{1}{2}^\circ$ enthalten lassen, ohne daß dadurch die Intensität übermäßig herabgedrückt wird. Das von einem solchen Doppelstrahl K ausgesandte Licht werde durch eine Zylinderlinse L_z und eine gewöhnliche runde Linse L_r (Brennweiten f_z und f_r) auf den Spalt S des Spektrographen

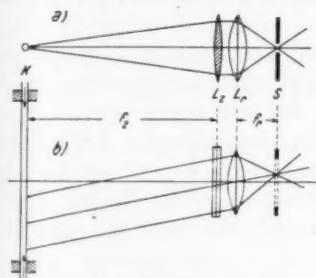


Abb. 1. Strahlengang.

- a) Grundriß,
b) Aufsicht



Abb. 2. Zu erwartendes Bild

- a) unter idealen Verhältnissen,
b) bei Berücksichtigung der Störungen

gesammelt (Abb. 1). Die Lichtstrahlen mit gleichem linearen Dopplereffekt vereinigen sich dabei im Spalt und auf der Photoplatte. Man wird also auf der Platte *drei* Striche sehen: zwei schräge, die von den beiden bewegten Strahlen herrühren, und einen senkrechten, das sogenannte ruhende Leuchten¹⁾. Bei Abwesenheit des quadratischen Dopplereffekts müßten die drei Striche durch *einen* Punkt gehen. Bei der erwarteten Größe des Effektes ist jedoch der Schnittpunkt der beiden schrägen Linien, der den Auftreffpunkt der genau senkrecht zur Bewegungsrichtung ausgesandten Lichtstrahlen kennzeichnet, um $\frac{1}{2}\beta^2\lambda$ vom ruhenden Leuchten aus gegen Rot verschoben (Abb. 2a).

Denken wir an Wasserstoff-Atomstrahlen von 50 kV Energie, so ist $\beta = \frac{v}{c} \approx 0,01$, und wir erwarten nach der Relativitätstheorie

1) Die Schrägstellung der Spektrallinie als Folge des Dopplereffektes, und damit eine einfache Unterscheidung zwischen dem Licht der bewegten Strahlteilchen und dem Licht der ruhenden Atome, hat erstmals H. Rau durch Verwendung eines quer zum Strahl stehenden Glasstäbchens erreicht (Ann. d. Phys. 73. S. 266. 1924).

bei der Linie $\lambda = 4861 \text{ \AA}$ eine Verschiebung um $0,2 \text{ \AA}$. Die Linienverbreiterung durch linearen Dopplereffekt ist bei der angenommenen Parallelität von $\pm \frac{1}{2}^\circ$ ungefähr gleich $0,2\beta\lambda \approx 1 \text{ \AA}$. Das auf der Platte erhaltene Bild müßte also eine erkennbare Unsymmetrie aufweisen. Spektrographiert man den Strahl aus zwei entgegengesetzten Richtungen, was man durch zwei Spiegel und geringes Heben des Spektrographen leicht auf dieselbe Platte bringen kann, so ist das arithmetische Mittel beider Unsymmetrien unabhängig von ionen-optischen Justierungsfehlern und dürfte eine größenordnungsmäßige Abschätzung des quadratischen Dopplereffektes ermöglichen.

Bei der Ermittlung der günstigsten Zahlenwerte von f_r , f_s usw. widersprechen sich die Forderungen kurzer Belichtungszeit und leichter Justierbarkeit. Der günstigste Kompromiß dürfte für die oben angenommene Geschwindigkeit und Parallelität bei $f_r \approx 1 \text{ cm}$, $f_s \approx 20 \text{ cm}$, Spaltweite $0,05 \text{ mm}$ und Strahldurchmesser 1 mm liegen. Das wirksame Öffnungsverhältnis der Linse L_r stimmt mit dem der Kollimatorlinse überein. Bei Verwendung eines üblichen Drei-Prismen-Spektrographen dürfte dann das Bild etwa das Aussehen der Abb. 2b haben.

Zeigt sich auf der Photoplatte nicht die erwartete Größe der Unsymmetrie, so weist dies auf eine, wenigstens prinzipielle, Möglichkeit zur Bestimmung des Ätherwindes hin. Fällt dagegen der Versuch in dem erwarteten Sinne aus, so gewinnen dadurch die Grundlagen der Elektrodynamik bewegter Körper erheblich an Sicherheit¹⁾.

1) Es bleibt dann nur noch die eine Frage offen, ob die Moleküle bewegter Körper nicht auch in der Querrichtung einander näher rücken. Zur Festlegung der drei Größen Längskontraktion, Zeitdilatation und Querkontraktion sind drei voneinander unabhängige Versuche nötig. Der Michelsonversuch prüft die Isotropie der Lichtgeschwindigkeit, sagt also nur aus, daß die Längskontraktion (Lorentzkontraktion) materieller Systeme um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ stärker ausfällt als die Querkontraktion. Der quadratische Dopplereffekt ergibt die Zeitdilatation materieller Schwingungen. Der in der ersten Anmerkung erwähnte Versuch von Kennedy bringt die Zeitdilatation in Beziehung zur (Längs- und Quer-) Kontraktion. Mit der experimentellen Entscheidung über das Auftreten der Querkontraktion wird man sonach warten müssen, bis der letztgenannte oder ein gleichwertiger Versuch die nötige Genauigkeit erreicht hat. Bis zum Beweis des Gegenteils wird aber wohl jeder Physiker annehmen, daß eine Querkontraktion bewegter materieller Körper nicht auftritt.

Anm. b. d. Korrektur: Herr Dr. habil. W. Maurer hat die Messung des quadratischen Dopplereffektes nach der hier beschriebenen Methode in Angriff genommen.

Darmstadt, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 7. Februar 1938)

*Über die Anwendung
von Transversalfeldmethoden zur Messung
von Ionisations- und Umladungsquerschnitten*

Von E. Persico und A. Rostagni

(Mit 5 Abbildungen)

Zur Messung von Ionisationsquerschnitten durch Elektronen- bzw. Ionen- oder Neutralstrahlen und von Umladungsquerschnitten von Ionen in Gasen hat man mehrmals elektrische Transversalfeldmethoden angewandt¹⁾. Eigentlich können solche Methoden jedesmal in Frage kommen, wenn ein Primärstrahl (eventuell auch ein Lichtstrahl) in einem Gas langsame geladene Teilchen erzeugt, die durch ein elektrisches Feld gesammelt werden können, ohne daß der Primärstrahl merklich beeinflusst wird.

Die Hauptfrage dabei, die nach der Bestimmung der Meßstrecke, d. h. der Strecke, auf welcher die gemessenen Teilchen erzeugt werden, bietet prinzipiell keine besondere Schwierigkeit, wenn die primären Teilchen entweder ungeladen (Photonen bzw. Atome) oder in Vergleich mit den sekundären sehr schnell sind. Die Bedingung unmerklicher Beeinflussung des Primärstrahls durch das Transversalfeld wird dann in der Tat leicht befriedigt, wenn auch der Strahl eine lange Strecke im Felde durchläuft: dementsprechend darf man, erstens, den Auffänger durch einen breiten Schutzring umgeben, damit kein Zweifel bestehen kann, daß das Feld homogen über dem Auffänger selbst, und weit darüber hinaus bleibt, und zweitens, darf man so starke Felder anwenden, daß der Auffängerstrom völlig gesättigt ist.

Wenn die primären Teilchen Elektronen, die sekundären aber Ionen sind, kann man weiter durch die Anwendung eines geeigneten

1) W. Kossel, Ann. d. Phys. 37. S. 409. 1912; K. T. Compton u. C. v. Voorhuis, Phys. Rev. 26. S. 436. 1925; F. Goldmann, Ann. d. Phys. [5] 10. S. 460. 1931; M. Nordmeyer, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 706. 1933; O. Beeck u. H. Wayland, Ann. der Phys. [5] 19. S. 129. 1934; A. Rostagni, N. Cim. 11. S. 621. 1934; 12. S. 134. 1935; 13. S. 389. 1936 (im folgenden als N. III, IV, V bezeichnet); F. Wolf, Ann. d. Phys. [5] 23. S. 627. 1935; 25. S. 737. 1936; 27. 543. 1936; 29. S. 33. 1937 (im folgenden als Wolf II, IV, VI, VII bezeichnet).

longitudinalen magnetischen Feldes den Primärstrahl dem Einfluß des transversalen elektrischen Feldes entziehen¹⁾.

Beträchtliche Schwierigkeiten treten jedoch auf, wenn die primären Teilchen langsame Ionen, (d. h. von weniger als 1000 eV-Geschwindigkeit) sind. Dann ist man einerseits geneigt, um die dem Feld unterworfenen Strahlänge möglichst zur Messung auszunützen, den Schutzring enger zu machen; andererseits, um die sonst meistens so komplizierten Vorrichtungen möglichst zu vereinfachen, benutzt man oft unsymmetrische Schaltungen: insbesondere eine solche, wo die ganze Spannung am Auffänger angelegt,

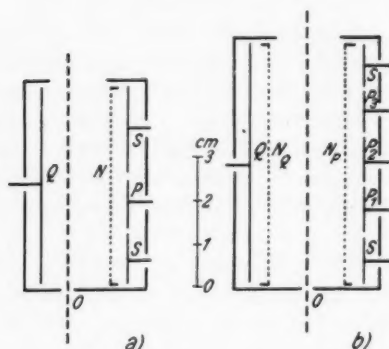


Abb. 1.

Q, P, P_1, P_2, P_3
sind ebene Platten,
 SS der Schutzring,
 N, N_Q, N_P Netze
aus 0,05 mm starken
parallel der Strahlrichtung
gespannten Drähte.
Das Gehäuse befindet sich
am Potential $V = 0$

die zweite Elektrode mit dem Gehäuse verbunden wird²⁾. Unter solchen Bedingungen haben z. B. Goldmann, Beeck und Wayland³⁾, sowie Wolf gemessen⁴⁾.

Die Frage wurde von dem einen von uns⁵⁾ bei Gelegenheit von Ionisationsmessungen durch Atom- bzw. Ionenstoß und Umladungs-messungen experimentell eingehend untersucht. In der Umladungsarbeit ($N. IV$) wurden zu diesem Zweck zwei verschiedene Meßanordnungen nach Abb. 1a, b ausprobiert. Die zu den endgültigen Messungen angewandte Anordnung a) ergab, unter den entsprechend angegebenen Hauptschaltungen, die Stromspannungskurven I, II, III (Abb. 2).

1) T. J. Jones, Phys. Rev. **29**, S. 822, 1927; W. Bleakney, Phys. Rev. **34**, S. 157, 1929; P. T. Smith, Phys. Rev. **36**, S. 1293, 1930.

2) Im folgenden als Schaltung I bezeichnet.

3) F. Goldmann, O. Beeck u. H. Wayland. a. a. O.

4) F. Wolf II, IV.

5) A. Rostagni, a. a. O.

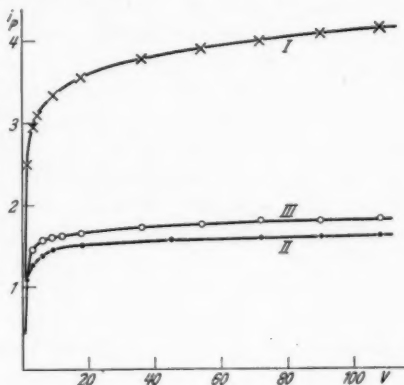
Eine Erklärung dieses Verhaltens, gestützt auf die Betrachtung qualitativer Felddiagramme, wurde damals vorgeschlagen¹⁾: die Kraftlinien laufen, aus dem Auffänger betrachtet, in der Schaltung I zusammen, in der Schaltung II auseinander: dementsprechend genügt es im ersten Falle, daß die Kraftlinien dem Auffänger gerade gegenüber annähernd parallel sind, damit nur Ionen von einer der Auffängerlänge ungefähr entsprechenden Strecke gemessen werden (so gut wie in der symmetrischen Schaltung III); im zweiten Fall sind die Ansprüche an Feldhomogenität beträchtlich größer: die Kraftlinien

Abb. 2.
900 Volt Ar^+ -Ionen in Ar;
 $p = 15 \cdot 10^{-3}$ mm Hg.
Stromspannungskurven am Auffänger P (Anordnung a) unter den folgenden Bedingungen:

Kurve I:
 $V_Q = 0 \quad V_N = V_P = V_S = -V$

Kurve II:
 $V_Q = V \quad V_N = V_P = V_S = 0$

Kurve III:
 $V_Q = +\frac{1}{2}V \quad V_N = -\frac{1}{2}V$
 $V_P = V_S = 0$



müssen weit außerhalb des Auffängers annähernd parallel sein, damit kein seitlich gebildetes Ion mitgemessen wird.

Diese Betrachtungen ließen die Zuverlässigkeit der unter Schaltung I ausgeführten Wirkungsquerschnittsbestimmungen dem Absolutwert nach etwas zweifelhaft erscheinen. Deswegen hat Rostagni sofort auf diesen als den Hauptgrund der Unstimmigkeit zwischen den Wolfschen Umladungsmessungen und den eigenen einerseits und den Wolfschen Absorptionsmessungen andererseits hingewiesen²⁾. Diese Vermutung hat sich endgültig als richtig erwiesen; denn nachdem Wolf, nach einigen Versuchen in verschiedenen Richtungen, seine Anordnung modifiziert hat, um eine symmetrische, zu III entsprechende Schaltung zu ermöglichen, sind seine Werte um 30% kleiner geworden, in voller Übereinstimmung mit Rostagnis Angaben³⁾.

1) A. Rostagni, a. a. O., S. 143.

2) A. Rostagni, Ann. d. Phys. [5] 24. S. 543. 1935.

3) F. Wolf IV, VI, VII.

Bei dieser Sachlage schien es uns angebracht, die Frage einer quantitativen Untersuchung zu unterwerfen, um die Arbeitsbedingungen von unsymmetrischen bzw. symmetrischen Anordnungen auf einmal festzulegen. So hat der eine von uns das Problem unter geeignet schematisierten Bedingungen mathematisch behandelt, die Kraftliniengleichungen und die Bahnen der Ionen bestimmt¹⁾. Einige dieser Bahnen sind in Abb. 3 für die Anordnung a) abgebildet.

Die Hauptresultate können so zusammengefaßt werden: wenn wir die y -Achse in der Richtung des Primärstrahls nehmen und mit y_0 die Anfangsordinate der sekundären Ionen auf der Primärstrahl-

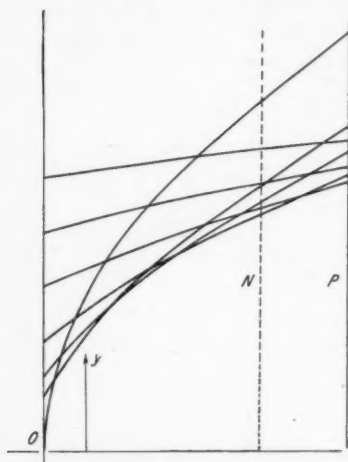


Abb. 3. Ionenbahnen in Anordnung a.
N Netz; P Ebene der Elektroden;
O Eintrittspunkt des Primärstrahls

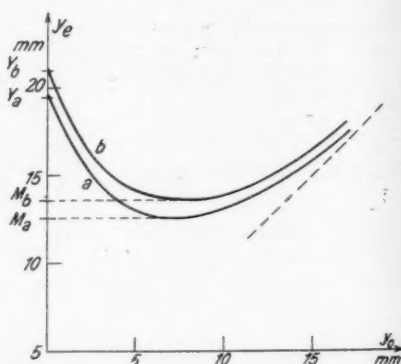


Abb. 4. y_0 ist die Ordinate des Ursprungs des Sekundärs; y_e die Ordinate des Ankunftspunktes des Sekundärs an die Elektrodenfläche P. Kurve a bezieht sich auf Anordnung a der Abb. 1, Kurve b auf Anordnung b

richtung, mit y_e die Endordinate auf der Elektrodenfläche P bezeichnen, zeigen die y_e in der Schaltung I für Anordnung a) bzw. Anordnung b) als Funktion der y_0 den in Abb. 4 wiedergegebenen Gang. Die beiden Kurven fangen mit endlichen Ordinaten Y_a , Y_b an, nehmen bis zu einem breiten Minimum M_a , M_b ab, um erst dann zuzunehmen und sich einer 45° gegen die Achse geneigten Gerade zu nähern.

Es folgt erstens, daß die Punkte von P zwischen den Ordinaten Y und M von Ionen erreicht werden, die aus zwei getrennten

1) E. Persico, Atti R. Acc. di Torino 73. S. 161. 1937.

Strecken herkommen, namentlich außer der „normalen“ gegenüberliegenden Strecke, auch aus einer sozusagen „anormalen“ nahe der Eintrittsöffnung gelegenen Strecke; zweitens, daß in der Nähe von M ein Brennpunkt liegt, d. h. ein Punkt großer Konzentration der Ionenbahnen. Die Messung wird sehr empfindlich gegen kleine Änderungen in den Versuchsbedingungen sein, wenn der Brennpunkt in die Nähe vom Auffängerrand fällt. Dies war der Fall in Rostagnis Anordnung a) unter Schaltung I, und wahrscheinlich auch in Wolfs ursprünglicher Anordnung¹⁾.

Die Betrachtung der Kraftlinienform für die symmetrische Schaltung III, so gut wie für die unsymmetrische II, zeigt ohne weiteres, daß in diesen Fällen die $y_c(y_0)$ -Kurve kein Minimum haben kann, so daß die Hauptquelle der anomalen Erscheinungen herausfällt. Es wird immer $y_c < y_0$ sein, mit $y_c \rightarrow y_0$ bei wachsendem y_0 , d. h. bei einem mehr und mehr homogen werdendem Feld. Angenäherte Homogenität wird früher in der symmetrischen Schaltung erreicht, dementsprechend bleiben die in der Schaltung II gemessenen Ströme kleiner als in Schaltung III, also kleiner als normal: die Differenz wird jedoch nur in äußersten Fällen beträchtlich.

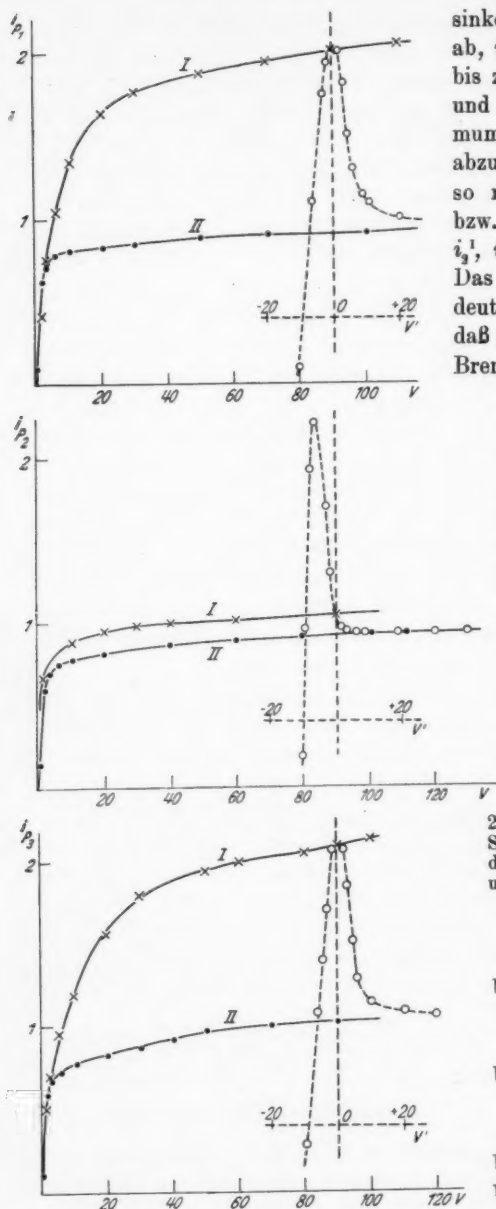
Die Stromzunahme von der Größenordnung 100%, die nach Abb. 2 in Rostagnis Anordnung stattfindet, wenn man von der Schaltung III zu der Schaltung I übergeht, wird quantitativ erklärt: wie aus den Abbildungen leicht zu ersehen ist.

Wir geben in Abb. 5 einige mit Anordnung b) erhaltene Diagramme wieder, die eine qualitative Illustrierung der Brennpunktsbildung bei unsymmetrischen Schaltungen von der Art I bieten.

Wegen der angenäherten Symmetrie von Anordnung b) gegen eine Transversalachse, muß man erwarten, daß eigentlich zwei Brennpunkte dabei gebildet werden, die näher der Eintritts- bzw. der Austrittsöffnung des Primärstrahls liegen. Unter den, den ausgezogenen Kurven entsprechenden Bedingungen fallen die Brennpunkte offenbar auf die Seitenelektroden P_1 und P_3 : wenn wir mit $i_1^I, i_2^I, i_3^I, i_1^{II}, i_2^{II}, i_3^{II}$, die Sättigungswerte der Ionenströme an den drei Auffängern mit den Schaltungen I und II bezeichnen, so hat man $i_1^I \approx i_3^I \approx 2 i_2^I \approx 2 i_3^{II}$ und $i_2^I \approx i_2^{II} \approx i_1^{II} \approx i_3^{II}$.

Wenn jedoch, von den den Kurven I entsprechenden Bedingungen ausgehend, die Spannung von N_Q allmählich geändert wird, so beobachtet man folgendes (gestrichelte Kurven): wenn $V_{N_Q} < 0$,

1) So könnte man die in F. Wolf IV, S. 745 hervorgehobene sehr starke Abhängigkeit der gemessenen Ströme von sehr kleinen seitlichen Versetzungen der Auffangdrähte erklären.



sinken i_1 und i_3 nach Null ab, i_2 nimmt im Gegenteil bis zu einem zwischen $2i_2''$ und $3i_2''$ liegenden Maximum zu, um dann nach Null abzusinken; wenn $V_{NQ} > 0$, so nehmen i_1 , i_2 und i_3 bzw. von den Werten i_1^1 , i_2^1 , i_3^1 zu i_1'' , i_2'' , i_3'' ab. Das alles läßt sich einfach deuten, wenn man bedenkt, daß mit $V_{NQ} < 0$ die beiden Brennpunkte sich nach der

Mitte des Systems, also nach P_3 , verschieben müssen, während mit $V_{NQ} > 0$ die Brennpunkte seitlich nach dem Schutzring verschoben und zum Verschwinden gebracht werden: die Schaltung nähert sich ja einer symmetrischen von der Art III.

Abb. 5.

225 Volt Ar^+ -Ionen in Ar. Stromspannungskurven an den Auffängern P_1 , P_2 , P_3 unter den folgenden Bedingungen:

Kurven I:

$$V_Q = V_{NQ} = V_{NP} = 0 \\ V_{P_1} = V_{P_2} = V_{P_3} = V_S = -V$$

Kurven II:

$$V_Q = V_{NQ} = V \\ V_{NP} = V_{P_1} = V_{P_2} = V_{P_3} \\ = V_S = 0$$

Gestrichelte Kurven:

$$V_Q = V_{NQ} = V' \quad V_{NP} = 0 \\ V_{P_1} = V_{P_2} = V_{P_3} = V_S = -90V.$$

Die hier beschriebenen Erscheinungen treten mit Sekundärionen aus Umladung besonders deutlich und einfach auf, da diese sehr kleine Anfangsgeschwindigkeiten besitzen. Es wird vielleicht möglich sein, dieselben Erscheinungen auszunützen, um nähere Angaben über die Geschwindigkeitsverteilung dieser Ionen zu erhalten, da die Lage des Minimums M (hier für Anfangsgeschwindigkeit Null berechnet) sehr empfindlich gegen kleine Änderungen derselben ist.

Etwas ungünstigere Verhältnisse treten mit Ionisationselektronen auf, da diese gewöhnlich ein breiteres Geschwindigkeitsspektrum besitzen und mit Sekundärelektronen aus den Blenden und aus den übrigen Metallteilen superponiert sind.

Die theoretischen Entwicklungen von Persico gestatten immerhin, eine tiefere Einsicht in die Arbeitsweise der einzelnen Meßanordnungen zu erhalten und die Zuverlässigkeit von Absolutwertangaben insbesondere für Umladungsquerschnitte rechnerisch zu begründen.

So stellt man fest, daß die von Rostagni in N. IV angenommene 5–10%ige Genauigkeit, bei der Gleichsetzung der Meßstrecke mit der Auffängerlänge in seiner symmetrischen Schaltung, auf einer nicht allzu optimistischen Schätzung beruht¹⁾.

1) Die von A. Rostagni und später von F. Wolf mit der verbesserten Anordnung angegebenen Umladungsquerschnitte dürfen wohl als mit dieser Genauigkeit gesichert betrachtet werden: wenigstens für Iongeschwindigkeiten oberhalb 100 Volt, wo mit voller Sättigung gearbeitet werden kann. Die zwischen beiden Messungsreihen bei kleineren Geschwindigkeiten auftretenden Abweichungen, insbesondere die Tatsache daß, während A. Rostagnis Messungen für Edelgase einen etwa bis 30 Volt aufsteigenden, erst unterhalb 30 Volt absinkenden Gang der UQ zeigen, die Wolfschen für Ar einen schon von 100 Volt herab absinkenden Gang zeigen, lassen selbstverständlich die Genauigkeit des unteren Teils der Meßkurven nochmals in Frage stellen.

R. hatte von vornherein den absinkenden Teil der UQ -Kurve in N. IV gestrichelt angegeben, obwohl aus der damaligen Diskussion weder ein Grund für wesentliche Herabsetzung der Meßgenauigkeit noch eine systematische im Sinne der Verkleinerung der Meßwerte bei kleineren Primärgeschwindigkeiten wirkende Fehlerquelle zu finden war. Die zur Auswertung der statt mit vollständiger Sättigung mit konstanter Transversalspannung ausgeführten Messungen angewandte Methode beruht auf der einzigen, sehr naheliegenden Voraussetzung, daß die aus der Umladung langsamer Primärionen erzeugten Sekundärionen nicht schneller als die Sekundären von schnelleren Primären sind; denn nur in diesem Fall würde aus der Messung eine Verkleinerung der UQ bei langsameren Primärionen vorgetäuscht werden können.

Rostagni hat letzthin diese Annahme versuchsweise diskutiert und gezeigt, daß sie mit dem Gang der Streuung bei kleineren Geschwindigkeiten vereinbar (Atti del Congresso Galvani, Bologna Okt. 1937) also nicht von vornherein abweisbar ist. Sie würde für die verschiedenen Anordnungen und für die verschiedenen Ionen von einer bestimmten Primärgeschwindigkeit an zu

Für die von Goldmann¹⁾ angewandte unsymmetrische Schaltung errechnet man nach den in der Arbeit angegebenen Abmessungen $Y = 10,2$ mm, während der untere Auffängerrand etwa auf $y = 10$ mm: d. h. die Ionen aus der anomalen Strecke fallen auf die Auffängerebene gerade bis zum Auffängerrand: also praktisch werden nur Ionen aus der normalen Strecke gemessen, und die Gleichsetzung dieser mit der Auffängerlänge erweist sich als berechtigt.

Eine entsprechende Berechnung für die Wolfsche Anordnung kann nicht einfach ausgeführt werden, da diese zu stark von den betrachteten Systemen abweicht. Die Experimente haben gezeigt, daß sie jedenfalls in ihrer früheren Form durch die Ionen aus der „anomalen“ Strecke gestört war.

einer scheinbaren Verkleinerung der UQ führen, in Abhängigkeit von der Verteilung der Sekundärgeschwindigkeiten.

Die von F. Wolf gegen die Zuverlässigkeit der Messungen von A. Rostagni im Vergleich mit den eigenen an verschiedenen Stellen geäußerten Einwände sind meistens schon in A. Rostagnis Arbeiten von vornherein diskutiert und widerlegt; manchmal beruhen sie auf Mißverständnissen, wie z. B. die irrtümliche Behauptung, daß A. Rostagni einen ebenen Auffänger statt einen Faradaykäfig bei den Umladungsmessungen benutzt (F. Wolf, VII, S. 39).

1) F. Goldmann, a. a. O.

Turin, Istituto di Fisica Teorica.

Messina, Istituto di Fisica della R. Università.

(Eingegangen 12. Februar 1938)

Der magnetische Schwellenwert für Supraleitung*Von M. v. Laue*

An dieser Stelle veröffentlichte ich kürzlich in einer Arbeit, die ich im folgenden als I anführe¹⁾, eine thermodynamische Theorie des magnetischen Einflusses auf die Supraleitung und wandte sie unter Rückgriff auf Londons Elektrodynamik auf Beispiele an, in denen die Oberfläche der Supraleiter stark gekrümmt ist. Dies möchte ich hier fortsetzen.

Nach I, (16b) läßt sich das Problem für das Innere des Supraleiters durch die Differentialgleichungen

$$(1a) \quad \Delta \mathbf{i} - \beta^2 \mathbf{i} = 0,$$

$$(1b) \quad \operatorname{div} \mathbf{i} = 0,$$

$$(1c) \quad \mathfrak{H} = -c\lambda \operatorname{rot} \mathbf{i}$$

formulieren. Außerhalb leitet sich die magnetische Feldstärke \mathfrak{H} aus einem Potential ψ ab, welches der Gleichung

$$(2) \quad \Delta \psi = 0$$

gehört. Die Verbindung beider Felder geschieht durch die Grenzbedingung der Stetigkeit von \mathfrak{H} . Außerdem setzen wir voraus, daß der Strom \mathbf{i} die Grenzfläche nicht durchsetzt (was an sich möglich wäre, wenn diese an einen Nicht-supraleiter stieße); wir fordern also als weitere Grenzbedingung

$$(3) \quad \mathbf{i}_n = 0.$$

In den Beispielen von I genügten Symmetriewägungen, einzusehen, daß keine Kraftlinie die Grenzfläche durchsetzt; fordert man aber $\mathfrak{H}_n = 0$, so ist dadurch das äußere Potential für sich völlig bestimmt; man hat das innere Feld hinterher nur anzupassen. In den folgenden Beispielen dringen einige Kraftlinien in den Supraleiter ein, natürlich nur auf Tiefen der Größenordnung β^{-1} ; dann muß man beide Felder gleichzeitig ermitteln. Darauf beruht ein gewisser Unterschied zwischen den früheren und den jetzt zu behandelnden Fällen.

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. [5] **32**, S. 71. 1938; dort findet sich die weitere Literatur. Die Bezeichnungen behalten wir hier bei.

§ 1. Der Kreiszylinder im transversalen homogenen Magnetfeld

In Zylinderkoordinaten r, ϑ, z mit der Zylinderachse als z -Achse machen wir für das Potential ψ unter Einführung der Feldstärke H_0 für großen Abstand vom Zylinder und einer verfügbaren Konstanten a den Ansatz

$$(4) \quad \psi = -H_0 r \cos \vartheta + a \frac{\cos \vartheta}{r}.$$

Die Feldstärke H_0 liegt danach in der Richtung $\vartheta = 0$. Daraus folgt dann:

$$(5) \quad \mathfrak{H}_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(H_0 + \frac{a}{r^2} \right) \cos \vartheta,$$

$$(6) \quad \mathfrak{H}_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \left(H_0 - \frac{a}{r^2} \right) \sin \vartheta$$

Den Beziehungen (1a), (1b) und (3) genügt es, wenn wir fürs Innere den Ansatz

$$(7) \quad i_r = i_\vartheta = 0; \quad i_z = b (i J_1(i \beta r)) \sin \vartheta$$

machen, in welchem b eine weitere verfügbare Konstante bedeutet. Nach (1c) folgt daraus:

$$(8) \quad \mathfrak{H}_r = -\frac{c \lambda}{r} \frac{\partial i_z}{\partial r} = c \lambda \beta b \frac{(-i J(i \beta r))}{\beta r} \cos \vartheta,$$

$$(9) \quad \mathfrak{H}_\vartheta = c \lambda \frac{\partial i_z}{\partial r} = -c \lambda \beta b J_1'(i \beta r) \sin \vartheta.$$

Den Zylinderradius nennen wir R . Die Stetigkeitsforderung für \mathfrak{H}_r und \mathfrak{H}_ϑ aufzustellen für $r = R$, ergibt nach (5) und (8) sowie nach (6) und (9) als Bestimmungsgleichungen für a und b :

$$(10) \quad H_0 + \frac{a}{R^2} = -c \lambda \beta b \left(\frac{J_1(i \beta R)}{i \beta R} \right),$$

$$(11) \quad H_0 - \frac{a}{R^2} = c \lambda \beta b J_1'(i \beta R).$$

Daraus folgt wegen I, (17):

$$(12) \quad b = \frac{2c\beta H_0}{J_1'(i\beta R) - \frac{J_1(i\beta R)}{i\beta R}} > 0^1).$$

Nach (8) und (9) hat \mathfrak{H}_r das Vorzeichen von $\cos \vartheta$, \mathfrak{H}_ϑ das entgegengesetzte wie $\sin \vartheta$. Dies entspricht der Tatsache, daß bei $\vartheta > \frac{\pi}{2}$

1) Denn in den Reihen

$$J_1'(ix) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu!(\nu+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2\nu}; \quad \frac{J_1(ix)}{ix} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!(\nu+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2\nu}$$

ist jeder Koeffizient positiv und für die erste Reihe größer als der entsprechende der zweiten.

gewisse Kraftlinien in den Zylinder ein-, bei $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ wieder austreten. Außerdem ist $\left(\frac{\mathfrak{H}_r}{\mathfrak{H}_\vartheta}\right)$ um so kleiner, je größer βR^1 ; im Grenzfall unendlich großen Wertes dafür erhalten wir, wie voraussehen, wieder das durch die Grenzbedingung $\mathfrak{H}_r = 0$ für sich allein bestimmte äußere Feld. In der Achse ($r = 0$) wird nach (7) die Stromdichte Null, während nach (8) und (9) die magnetische Feldstärke endlich bleibt und²⁾ die Richtung des äußeren Feldes H_0 hat. Natürlich ist sie dort für große βR -Werte ganz unbedeutend; in der Tat verschwindet ja b nach (12) wie $(\beta R)^{1/2} e^{-\beta R}$.

Um auf den magnetischen Schwellenwert nach I, (20) zu kommen, berechnen wir nach (7) und (12) für $r = R$ unter Berücksichtigung von I, (17)

$$(13) \quad K_n = \frac{1}{2} \lambda i_z^2 = \frac{2 H_0^2 \sin^2 \vartheta}{\left(\frac{J_1'(\beta R)}{-i J_1(\beta R)} - \frac{1}{\beta R} \right)^2}.$$

Stabilitätsbedingung für die Supraleitung ist, daß der Maximalwert von K_n , der für $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ eintritt, unter dem kritischen Wert $\frac{1}{2} H_k^2 = \frac{1}{v} [(u_2 - T s_2) - (u_1 - T s_1)]$ liegt, den man aus I, (10) und I, (12) ermittelt. Der Schwellenwert für H_0 ist folglich gegeben durch die Gleichung:

$$(14) \quad \left(\frac{H_0}{\frac{1}{2} H_k} \right)^2 = \left(\frac{J_1'(\beta R)}{-i J_1(\beta R)} - \frac{1}{\beta R} \right)^2.$$

Nun ist aber

$$\frac{J_1'(ix)}{-i J_1(ix)} = \frac{d}{dx} (\log J_1(ix)),$$

und für große Werte des Arguments gilt:

$$(15) \quad J_1(ix) = i \frac{e^x}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}} \left(1 - \frac{3}{8x} + \dots \right),$$

so daß

$$\frac{J_1'(ix)}{-i J_1(ix)} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \dots$$

wird. Gl. (14) geht also über in die Formel:

$$(16) \quad \left(\frac{H_0}{\frac{1}{2} H_k} \right)^2 = 1 - \frac{3}{\beta R} + \frac{3}{(\beta R)^2} + \dots$$

1) Denn für große x nähern sich $J_1'(ix)$ und $J_1(ix)$ dem Werte $\frac{e^x}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}}$.
Vgl. Gl. (15).

2) Denn im Grenzfall $x = 0$ werden $J_1'(ix)$ und $\frac{J_1(ix)}{ix}$ einander gleich.

Für das longitudinale Feld ist nach I, (24) der Schwellenwert bestimmt durch

$$\left(\frac{H_0}{H_k}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\beta R} + \frac{1}{(\beta R)^2} + \dots$$

Im transversalen Felde hat somit die Krümmungskorrektur erster Ordnung entgegengesetztes Vorzeichen und ist größer als im longitudinalen. Für dicke Zylinder folgt aus (16) $\frac{1}{2}H_k$ als Schwellenwert, ein wohlbekanntes Ergebnis. Gl. (16) eignet sich zu experimenteller Prüfung.

§ 2. Die Kugel im homogenen Magnetfelde

Nebeneinander benutzen wir rechtwinklige, im Kugelmittelpunkt beginnende Koordinaten x, y, z , wobei die positive z -Richtung die des homogenen Feldes weit außerhalb darstellt, und Polarkoordinaten r, ϑ, φ , wobei wir den Polabstand ϑ von der positiven z -Achse aus rechnen. Der Kugelradius heiße R .

Entsprechend der Gl. (4) machen wir für das Potential den Ansatz:

$$(17) \quad \psi = -H_0 r \cos \vartheta + a \frac{\cos \vartheta}{r^2},$$

so daß

$$(18) \quad \mathfrak{H}_r = \left(H_0 + \frac{2a}{r^3}\right) \cos \vartheta,$$

$$(19) \quad \mathfrak{H}_\vartheta = -\left(H_0 - \frac{a}{r^3}\right) \sin \vartheta$$

wird. Den Gl. (1b) und (3) genügt es, wenn wir der Stromdichte nur die eine, von φ unabhängige Komponente

$$(20) \quad i_\varphi = b \frac{F(\beta R)}{\beta R} \sin \vartheta$$

geben, wobei b wiederum eine verfügbare Konstante, F aber eine noch zu bestimmende Funktion bedeutet. Für die Komponenten i_x, i_y heißt dies:

$$(21) \quad i_x = -b \frac{F(\beta r)}{\beta r} \sin \vartheta \sin \varphi, \quad i_y = b \frac{F(\beta r)}{\beta r} \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Diese beiden Komponenten (nicht i_φ) müssen der Gl. (1a) gehorchen. Da die Winkelfunktionen in (21) Kugelfunktionen erster Ordnung sind, ergibt sich für die Funktion F die Differentialgleichung

$$(22) \quad \frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} - \left(1 + \frac{2}{\varphi^2}\right) F(\varphi) = 0.$$

Sie hat als linear unabhängige Lösungen die Funktionen

$$\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\cos \varphi}{\varphi} - \sin \varphi,$$

von denen die zweite wegen ihrer Singularität im Nullpunkt außer Betracht bleibt. Wir setzen also

$$(23) \quad F(\varrho) = \mathcal{C}of \varrho - \frac{\mathcal{S}in \varrho}{\varrho}.$$

Für alle positiven Argumentwerte sind $F(\varrho)$ und $F'(\varrho)$ positiv¹⁾.

Für das Magnetfeld im Inneren liefert (1c):

$$(24) \quad \mathfrak{H}_r = \frac{c\lambda}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot i_\varphi) = 2c\lambda\beta b \frac{F(\beta r)}{(\beta r)^3} \cos \vartheta$$

$$(25) \quad \mathfrak{H}_\vartheta = -\frac{c\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r i_\varphi) = -c\lambda\beta b \frac{F'(\beta r)}{\beta r} \sin \vartheta.$$

Für $r = R$ müssen die rechten Seiten von (18) und (24), (19) und (25) übereinstimmen. Dies ergibt die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten a und b :

$$(26) \quad H_0 + \frac{2a}{R^3} = \frac{2b}{c\beta} \frac{F(\beta R)}{(\beta R)^3}$$

$$(27) \quad H_0 - \frac{a}{R^3} = \frac{b}{c\beta} \frac{F'(\beta R)}{\beta R}.$$

Folglich:

$$(28) \quad b = \frac{\frac{3}{2} c\beta H_0}{\frac{F(\beta R)}{(\beta R)^3} + \frac{F'(\beta R)}{\beta R}} > 0.$$

Man kann aus (24) und (25) wie in § 1 auf den Eintritt von Kraftlinien bei $\vartheta > \frac{1}{2}\pi$ und ihren Wiederaustritt bei $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ schließen.

Wiederum verschwindet für $r = 0$ die Stromdichte i , nicht aber die Feldstärke \mathfrak{H} ; vielmehr hat diese die Richtung des äußeren homogenen Magnetfeldes²⁾, ist aber für große Werte βR ganz unbedeutend, da nach (28) sich b wie $\beta R e^{-\beta R}$ verhält³⁾.

Zur Ermittlung des Schwellenwertes berechnen wir gemäß I, (20) für $r = R$

$$(29) \quad K_n = \frac{1}{2} \lambda i_\varphi^2 = \frac{\frac{9}{8} H_0^2 \sin^2 \vartheta}{\left(\frac{F(\beta R)}{F(\beta R)} + \frac{1}{\beta R} \right)^2}$$

[vgl. I, (17) sowie (20) und (28)]. Da weiter für große ϱ nach (23)

$$(30) \quad F(\varrho) = e^\varrho \left(1 - \frac{1}{\varrho} \right)$$

1) Denn aus den Reihenentwicklungen für $\mathcal{C}of \varrho$ und $\mathcal{S}in \varrho$ folgt:

$$F(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{2n}}{(2n+1) \cdot (2n-1)!}.$$

2) Denn für verschwindendes ϱ wird $F'(\varrho) = \frac{F(\varrho)}{\varrho}$.

3) Vgl. auch Gl. (30).

und

$$\frac{F'(\varrho)}{F(\varrho)} = \frac{d}{d\varrho} (\log F(\varrho)) = 1 + \frac{1}{\varrho^2}$$

ist, findet man mittels derselben Schlußweise wie in § 1 aus (29) als Schwellenwert für H_0 :

$$(31) \quad \left(\frac{H_0}{\frac{2}{3} H_k} \right)^2 = 1 + \frac{2}{\beta R} + \frac{3}{(\beta R)^2}.$$

Für unendlich großes βR ist danach, wie länger bekannt, $\frac{2}{3} H_k$ der Schwellenwert. Kommt βR gegen 1 in Betracht, so erhöht er sich, im Gegensatz zum Zylinder im transversalen Feld, bei dem er nach (16) niedriger wird.

Zusammenfassung

Die erste, hier als I zitierte Arbeit untersucht das thermodynamische Gleichgewicht zwischen der supraleitenden und der normalleitenden Phase eines Stoffes für den Fall, daß beide beliebige Form haben und in einem beliebigen Magnetfelde liegen. Die Gleichgewichtsbedingung I, (10) besagt, daß längs der ganzen gemeinsamen Oberfläche die auf die Volumeneinheit bezogene Differenz der freien Energie gleich der Normalkomponente der Kraft sein muß, welche das Magnetfeld auf den Supraleiter ausübt. Für hinreichend dicke Körper und schwache Krümmung der Oberfläche führt dies zu der schon von Gorter und anderen aufgestellten Bedingung; nur daß man hier sieht, daß Überschreitung des magnetischen Schwellenwertes auch nur an einer Stelle das Gleichgewicht zerstört.

Wie geringe Dicke oder starke Krümmung den Schwellenwert abändert, zeigt dann Arbeit I unter Benutzung der Londonschen Elektrodynamik des Supraleiters in I, Gl. (20). Diese und die vorliegende Arbeit wenden das allgemeine Ergebnis an auf den zylindrischen Leiter im longitudinalen und transversalen Magnetfeld [Gl. I, (24) und (16)], für die Kugel Gl. (31), für den stromführenden Zylinder [Gl. I, (26)], sowie für eine zylindrische Bohrung in einem dicken Körper [Gl. I, (29)]. Messungen von Pontius über den dünnen Draht im longitudinalen Felde passen gut zu dem Ergebnis I, (24).

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik.

(Eingegangen 18. Februar 1938)

**Die Abhängigkeit des Widerstandes
von Nickelkristallen von der Richtung
der spontanen Magnetisierung**

Von W. Döring

(Mit 4 Abbildungen)

Nach unseren heutigen Vorstellungen ist ein ferromagnetisches Material bei Temperaturen unterhalb des Curiepunktes stets in einzelnen Bezirken spontan bis zur Sättigung magnetisiert. Im pauschal unmagnetischem Zustand ist nur die Richtung der Magnetisierung von Bezirk zu Bezirk verschieden. Das Magnetfeld dreht beim Magnetisieren lediglich die Vektoren der spontanen Magnetisierung in die Feldrichtung, ohne Änderung ihres Betrages. Da sich bei dem ferromagnetischen Magnetisierungsvorgang der elektrische Widerstand ändert, muß also der Widerstand von der Richtung der spontanen Magnetisierung relativ zu den Kristallachsen und zum Strom abhängen. Das Ziel aller Untersuchungen über diesen Effekt ist es demnach in erster Linie, das Gesetz dieser Abhängigkeit zu bestimmen, indem man die Widerstandsunterschiede bei Sättigung in verschiedenen Richtungen mißt. Erst in zweiter Linie interessiert auch der Verlauf des Widerstandes als Funktion des Feldes oder der pauschalen Magnetisierung. Wenn nämlich die Abhängigkeit des Widerstandes von der Richtung des Stromes und der Magnetisierung bekannt ist, ist der Verlauf mit dem Feld berechenbar, sobald die Richtungsverteilung der Vektoren der spontanen Magnetisierung gegeben ist. Das ist also ein Problem wie das der Berechnung der Magnetisierungskurven. Der Vergleich zwischen Rechnung und Experiment kann als Kontrolle unserer Vorstellungen über den Magnetisierungsvorgang herangezogen werden. Unter diesem Gesichtspunkt allein ist der Verlauf der Widerstandsänderung im Feld von Interesse, da prinzipiell sein Zustandekommen klar ist.

Der Widerstand von Eisen- und Nickelkristallen im magnetisch gesättigten Zustand ist nun in recht komplizierter Weise von der Richtung des Stromes und der Magnetisierung relativ zu den Kristallachsen abhängig. Zur Untersuchung sind deshalb bisher stets Kristallstäbchen benutzt worden, deren Achsen mit einfachen

Kristallrichtungen übereinstimmten¹⁾. R. Gans und J. v. Harlem²⁾ haben aber gezeigt, daß man aus solchen Messungen auf Grund einfacher Symmetrieüberlegungen auf die Größe des Widerstandes in beliebigen Richtungen schließen kann.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß man dies Verfahren auch umkehren kann, daß man aus Messungen der Widerstandsänderungen an kristallographisch beliebig orientierten Stäbchen die Größe des Effektes in einfachen Richtungen bestimmen kann. Dies umgekehrte Verfahren hat mancherlei praktische Vorteile. Denn die für die Messungen günstige Form sehr langer dünner Einkristallstäbchen ist leicht herzustellen, wenn man die kristallographische Orientierung der Stabachse dem Zufall überläßt. Bei Eisen ist das Rekristallisationsverfahren an Drähten und bei Nickel das Erstarrenlassen aus der Schmelze unter geeigneten Bedingungen in sehr dünnen Tiegeln³⁾ mit Erfolg angewandt worden. Eine bestimmte Kristallrichtung der Achse kann man dabei aber im allgemeinen nicht erzielen. Bei den bisher durchgeführten Messungen sind die Stäbchen stets aus großen Kristallen herausgesägt worden. Bei sehr dünnen Stücken führt das leicht zu unzulässig hohen Beanspruchungen der weichen Einkristalle, und außerdem ist eine sehr genaue Einhaltung der gewünschten kristallographischen Richtung dabei auch sehr schwierig.

Im ersten Teil dieser Arbeit soll die anzuwendende Methode zur Auswertung von Messungen an Stäbchen mit beliebiger Orientierung der Achse erläutert werden. Sie ist für alle kubischen Kristalle anwendbar sowohl für die Widerstandsänderung als auch für die Magnetostriktion. Im zweiten Teil soll an Messungen des Widerstandes von Nickelkristallen die praktische Anwendbarkeit gezeigt werden.

1. Die Symmetriefunktionen des kubischen Kristalls und die Methode der Bestimmung ihrer Koeffizienten

Im Gültigkeitsbereich des Ohmschen Gesetzes sind die Komponenten E_1, E_2, E_3 des Vektors der elektrischen Feldstärke lineare Funktionen der Komponenten j_1, j_2, j_3 des Vektors der Stromdichte:

$$E_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} j_k$$

1) W. L. Webster, Proc. Roy. Soc. London (A) **113**. S. 196. 1927; **114**. S. 611. 1927. S. Kaya, Soc. Rep. Toh. Univ. **17**. S. 1027. 1928.

2) R. Gans u. J. v. Harlem, Ann. d. Phys. [5] **15**. S. 516. 1932.

3) F. Lichtenberger, Ann. d. Phys. [5] **15**. S. 45. 1932.

Die Komponente der Feldstärke parallel zum Stromdichtevektor dividiert durch den Betrag der Stromdichte ist der spezifische Widerstand ϱ . Sind $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die Richtungskosinusse der Stromrichtung

$$\left(\beta_1 = \frac{j_1}{\sqrt{j_1^2 + j_2^2 + j_3^2}} \text{ usw.} \right)$$

so folgt demnach

$$(1) \quad \varrho = \sum_{i,k=1}^3 w_{ik} \beta_i \beta_k$$

Bei nicht ferromagnetischen Stoffen sind die w_{ik} konstante Zahlen. Bei ferromagnetischen Materialien sind sie dagegen Funktionen der Richtungskosinusse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der Magnetisierung. Bei einem kubischen Kristall können aber wegen der Symmetrie die w_{ik} nicht ganz beliebige Funktionen der α_i sein, sondern müssen gewissen Symmetriebedingungen genügen. Es darf sich ja ϱ nicht ändern, wenn ich von einem Zustand zu einem anderen übergehe, der aus dem ersten durch die Anwendung einer Symmetrioperation des kubischen Gitters auf den Vektor der Stromdichte und der spontanen Magnetisierung hervorgeht. Als Koordinatenachsen wähle ich die tetragonalen Achsen des Kristalls. Die sämtlichen Deckoperationen des kubischen Kristalls lassen sich dann gewinnen durch Zusammensetzung der folgenden 6 einfachen Spiegelungen:

1. Spiegelung an einer der drei Koordinatenebenen. Zwei Anordnungen des Stromdichte- und des Magnetisierungsvektors, die z. B. spiegelbildlich in bezug auf die y - z -Ebene sind, unterscheiden sich nur in den Vorzeichen der Richtungskosinusse α_1 und β_1 . ϱ muß also unverändert bleiben, wenn bei einem α_i und dem zugehörigen β_i gleichzeitig das Vorzeichen umgekehrt wird.

2. Spiegelung an einer der Ebenen durch eine Koordinatenachse und die Winkelhalbierenden zwischen den anderen beiden positiven Halbachsen. Spiegelung an der Ebene durch die z -Achse und die Winkelhalbierende der x - und y -Achse bewirkt eine Vertauschung von α_1 mit α_2 sowie von β_1 mit β_2 . Allgemein muß demnach ϱ invariant sein gegenüber irgendeiner Vertauschung der Indizes an den α_i und β_i , sofern sie nur bei den α_i und β_i in gleicher Weise vorgenommen werden.

Um die Folgerungen zu übersehen, die sich daraus für die w_{ik} ergeben, betrachte ich spezielle Richtungen. Ich nehme zunächst den Strom in der x -Richtung an:

$$\beta_1 = 1; \beta_2 = \beta_3 = 0$$

Dann gilt

$$\varrho = w_{11}(\alpha_i) \beta_1^2 = w_{11}(\alpha_i)$$

$w_{11}(\alpha_i)$ muß also invariant sein gegen alle Symmetrioperationen, die β_1^2 unverändert lassen. Das sind die unter 1. aufgeführten Spiegelungen, die nur die Vorzeichen umkehren, und diejenige von 2., die die Indizes 2 und 3 vertauscht. $w_{11}(\alpha_i)$ ist also eine gerade Funktion der α_i , die symmetrisch in α_2 und α_3 ist. Zur Abkürzung will ich fortan den Buchstaben s für die Größe

$$s = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2$$

benutzen. Ist von einer speziellen Richtung α_1^2 und s gegeben, so ist wegen

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

dadurch die Summe

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 - \alpha_1^2$$

und das Produkt

$$\alpha_2^2 \alpha_3^2 = s - \alpha_1^2 (1 - \alpha_1^2)$$

ebenfalls gegeben und somit bis auf eine Vertauschung auch α_2^2 und α_3^2 selbst. Alle Richtungen, die das gleiche α_1^2 und s haben, unterscheiden sich also voneinander nur durch das Vorzeichen ihrer Richtungskosinusse und Vertauschungen von α_2 und α_3 . Da aber wegen der Symmetrie alle diese Richtungen den gleichen Wert von $w_{11}(\alpha_i)$ ergeben, kann w_{11} als eine eindeutige Funktion von α_1^2 und s allein aufgefaßt werden:

$$w_{11}(\alpha_i) = U(\alpha_1^2; s)$$

Die Spiegelung an derjenigen Ebene der Sorte 2, die die z -Achse enthält, vertauscht α_1 und α_3 und macht aus einem Strom in der x -Achse einen in der y -Achse. Also muß $w_{22}(\alpha_i)$ aus $w_{11}(\alpha_i)$ hervorgehen durch Vertauschung von α_1 und α_2 . Somit folgt:

$$w_{22}(\alpha_i) = U(\alpha_2^2; s),$$

da s sich bei einer solchen Vertauschung nicht ändert. In dieser Weise kann man nun weiterschließen, indem man noch andere spezielle Richtungen heranzieht. Man erhält auf diese Weise schließlich, daß ϱ wegen der obigen Symmetriebedingungen die Gestalt haben muß:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho &= U(\alpha_1^2; s) \beta_1^2 + U(\alpha_2^2; s) \beta_2^2 + U(\alpha_3^2; s) \beta_3^2 \\ &+ 2 \alpha_1 \alpha_2 V(\alpha_3^2; s) \beta_1 \beta_2 + 2 \alpha_2 \alpha_3 V(\alpha_1^2; s) \beta_2 \beta_3 \\ &+ 2 \alpha_3 \alpha_1 V(\alpha_2^2; s) \beta_3 \beta_1. \end{aligned} \right.$$

Darin sind nur noch zwei Funktionen U und V enthalten. Da andererseits dieser Ausdruck bei willkürlicher Wahl der Funktionen U und V allen Symmetrieforderungen des kubischen Gitters genügt, sind weitere Folgerungen für ϱ aus der Symmetrie nicht zu ziehen.

Da uns eine atomare Theorie für die Richtungsabhängigkeit des Widerstandes fehlt, können wir daher weitere Aussagen über U und V nur den Experimenten entnehmen.

Es ist jedoch vernünftig anzunehmen, daß U und V analytische Funktionen ihrer Argumente sind. Wir wollen sie in Reihen entwickeln und versuchen, ob wir mit einer endlichen Anzahl von Gliedern bei der Anpassung an die Experimente auskommen. In der Tat werden wir später sehen, daß man die Widerstandsmessungen an Nickel gut darstellen kann, wenn man in ϱ alle Terme streicht, die von höherem als dem vierten Grade in α_i sind. Wir wollen die Reihenentwicklung nicht für ϱ selbst, sondern für die relative Widerstandsänderung $\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0}$ ansetzen. Dabei ist ϱ_0 der mittlere spezifische Widerstand in demjenigen Zustand, in welchem die Magnetisierungsrichtungen zu gleichen Teilen auf alle leichten Richtungen verteilt sind. Da die relativen Widerstandsunterschiede für verschiedene Magnetisierungsrichtungen nur klein sind, ist es gleichgültig, ob ich die Mittelung dabei über die Widerstände oder die Leitfähigkeiten ausführe. Bei Nickel, wo die 8 Raumdiagonalen die leichten Richtungen darstellen, gilt also

$$\varrho_0 = U\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Bei Eisen gilt entsprechend

$$\varrho_0 = \frac{1}{3} U(1; 0) + \frac{2}{3} U(0, 0).$$

Wenn ich alle Glieder von höherer als vierter Potenz in den α_i in der Entwicklung vernachlässige, erhalte ich somit für Nickel bei geeigneter Zusammenfassung als allgemeinsten Ausdruck für $\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0}$ den Ansatz

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = & k_1 \left(\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 - \frac{1}{3} \right) \\ & + k_2 (2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + 2 \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + 2 \alpha_3 \alpha_1 \beta_3 \beta_1) \\ & + k_3 \left(s - \frac{1}{3} \right) + k_4 \left(\alpha_1^4 \beta_1^2 + \alpha_2^4 \beta_2^2 + \alpha_3^4 \beta_3^2 + \frac{2}{3} s - \frac{1}{3} \right) \\ & + k_5 (2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 \beta_1 \beta_2 + 2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1^2 \beta_2 \beta_3 + 2 \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_3 \beta_1). \end{aligned} \right.$$

Dabei ist s die oben eingeführte Abkürzung

$$s = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2.$$

Der Ansatz für Eisen unterscheidet sich von diesem nur dadurch, daß im Glied $k_3 \left(s - \frac{1}{3} \right)$ der Summand $\frac{1}{3}$ fortzulassen ist. In dieser Näherung bis zu den vierten Potenzen in α_i sind also noch 5 Kon-

stanten k_1 bis k_5 in dem allgemeinsten Ansatz enthalten. Sie sind durch die Experimente zu bestimmen.

Es fällt auf, daß der Ansatz (3) eine Konstante weniger enthält als der entsprechende Ansatz, den R. Gans und J. v. Harlem benutzen. Diese Verf. haben außer den obigen Gliedern noch den Ausdruck $\alpha_1^2 \alpha_2^2 \beta_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 \beta_1^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 \beta_2^2$ mit einer Konstanten versehen hinzugefügt. Da sie keinen systematischen Weg zur Gewinnung dieser Entwicklungsfunktionen kannten, ist ihnen entgangen, daß dieser Ausdruck von den übrigen nicht linear unabhängig ist. Es gilt nämlich:

$$(\alpha_1^2 \alpha_2^2 \beta_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 \beta_1^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 \beta_2^2) - (\alpha_1^4 \beta_1^2 + \alpha_2^4 \beta_3^2 + \alpha_3^4 \beta_3^2) + (\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2) = (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2).$$

Dadurch erklärt sich die von den Verf. bemerkte Tatsache, daß ihre Konstanten aus den Messungen nicht bestimmbar waren, aber gerade alle Kombinationen, die zur Berechnung des Kurvenverlaufes im Feld nötig waren. Durch das hier angegebene Verfahren zur Gewinnung dieser Symmetriefunktion ist solch ein Versehen auch beim Hinzunehmen von noch weiteren Ausdrücken von vornherein ausgeschlossen.

Es bleibt nun noch zu erörtern, wie man die Konstanten k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 aus den Messungen ermitteln kann. Dabei ist zunächst zu beachten, daß möglicherweise die Verteilung der Magnetisierungsrichtungen im entmagnetisierten Zustand bei den wirklichen Kristallen sich von der für ϱ_0 angenommenen Verteilung unterscheidet. Es besteht ja durchaus die Möglichkeit, daß infolge innerer Spannungen, die sich bei der Herstellung ausgebildet haben, eine der leichten Richtungen bevorzugt ist. Wir werden später sehen, daß die darauf zurückzuführenden Abweichungen recht erheblich sein können. Der spezifische Widerstand im entmagnetisierten Zustand ist also unter Umständen von ϱ_0 verschieden. Im Nenner von $\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0}$ ist dieser Unterschied zu vernachlässigen, aber nicht im Zähler bei der kleinen Differenz $\varrho - \varrho_0$. Die relative Widerstandsänderung $\Delta R/R$ bei Magnetisierung vom entmagnetisierten Zustand bis zur Sättigung ist demnach bei dem realen Kristall nicht gleich $\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0}$, sondern unterscheidet sich davon um eine Abweichung δ , die von der Magnetisierungsrichtung unabhängig ist, aber noch von den β_i abhängen kann und von Kristall zu Kristall verschieden ist.

$$(4) \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} + \delta.$$

Um diese unbekannte Abweichung δ zu eliminieren, sollen deshalb zur Bestimmung der k_i nur Differenzen verschiedener $\Delta R/R$ -Werte in der Sättigung für verschiedene Magnetisierungsrichtungen bei gleicher Stromrichtung herangezogen werden. Dann fällt δ heraus.

Die Messungen wurden an Stäbchen vorgenommen, die stets in ihrer Längsrichtung vom Meßstrom durchfloßen waren. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sind also für einen Kristall feste Zahlen. Die Magnetisierung geschah parallel und senkrecht zum Strom. Bei longitudinaler Magnetisierung ist das Ergebnis eine Zahl, die relative Widerstandsänderung zwischen entmagnetisiertem Zustand und Sättigung,

$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\text{long.}}$. Bei transversaler Magnetisierung kann die Magnetisierungsrichtung noch in der Normalebene senkrecht zum Strom variiert werden. Eine gewisse Richtung $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in dieser Ebene bezeichnen wir als die Nullrichtung. Die Magnetisierungsrichtung in der Normalebene ist dann durch den Winkel φ gegen diese Richtung festgelegt. Das Ergebnis der Transversaleffektmessungen ist also eine Kurve für den Sättigungseffekt, $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\text{trans.}}$, als Funktion von φ . Da

(3) gegen einen Vorzeichenwechsel der α_i invariant ist, muß diese die Periode 180° haben, was von den Experimenten bestätigt wurde. Zur Auswertung wurde diese Kurve einer Fourieranalyse unterworfen:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\text{trans.}} = a_0 + a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi + \dots \\ + b_1 \sin 2\varphi + b_2 \sin 4\varphi + \dots$$

Da nur Differenzen zwischen verschiedenen Sättigungswerten benutzt werden sollen, stehen demnach zur Bestimmung der Konstanten k_1 bis k_6 als Meßergebnis die Fourierkoeffizienten $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots$ und die Differenz zwischen dem Longitudinaleffekt und dem Mittelwert des Transversaleffektes, $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\text{long.}} - a_0$ zur Verfügung. Es ist nun auch klar, wie im Prinzip die Bestimmung vor sich zu gehen hat. Ich habe einfach aus dem allgemeinen Ansatz (3) dieselben Größen zu berechnen. Ich erhalte für sie gewisse Ausdrücke, die die Größen k_i und die für jeden Kristall charakteristischen Richtungskosinusse β_i und γ_i enthalten. Indem ich die gemessenen Werte von β_i und γ_i einsetze und diesen Ausdruck dem aus dem gemessenen Widerstandseffekt entnommenen Wert gleichsetze, erhalte ich jedesmal eine Gleichung für die k_i . Sobald ich mehrere Kristalle messe, erhalte ich auf diese Weise aber viel mehr Gleichungen, als Konstanten zur Verfügung stehen. Wegen der unvermeidlichen Meßfehler werden sich diese im allgemeinen in gewissem Grade widersprechen. Man wird dann etwa nach der Methode der kleinsten

Quadrate diejenige Lösung suchen, die die Gleichungen am besten erfüllt. Indem man dann rückwärts aus den so erhaltenen Koeffizienten die zu erwartenden Effekte berechnet und mit den tatsächlich gemessenen vergleicht, gewinnt man eine gute Kontrolle der Messungen. Das ist ein großer Vorteil dieses Verfahrens gegenüber demjenigen mit einfach orientierten Stäbchen; denn bei letzterem fällt diese Kontrollmöglichkeit fast ganz fort, da in dem theoretischen Ansatz in speziellen Richtungen immer viele Koeffizienten herausfallen.

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken: Wenn man aus dem theoretischen Ansatz (3) die Fourierkoeffizienten des Transversaleffektes berechnet, stellt man fest, daß die Koeffizienten a_3, b_3 und alle höheren verschwinden. Das liegt daran, daß wir in (3) nur Glieder mit höchstens vierter Potenz in α_i berücksichtigt haben. Es gilt, wie man leicht übersieht, allgemein, daß bei Vernachlässigung der Glieder mit höherer als der $(2n)$ -ten Potenz in α_i in dem theoretischen Ansatz alle höheren Fourierkoeffizienten als a_n und b_n für den Transversaleffekt verschwinden. Hier ergibt sich also eine einfache Möglichkeit, aus den Messungen unmittelbar zu entnehmen, wieweit ich in der Potenzreihenentwicklung von U und V gehen muß, um eine gute Anpassung erzielen zu können. Wenn im Transversaleffekt die Fourierkoeffizienten a_n und b_n noch wesentlich sind, muß man mindestens noch Glieder mit der $(2n)$ -ten Potenz in α_i berücksichtigen. Da wir hier mit den vierten Potenzen abbrechen wollen, können wir eine Anpassung an die Messungen nur hinsichtlich der Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2 und der Differenz $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\text{long.}} - a_0$ erreichen. Die anderen Koeffizienten sind im theoretischen Ansatz gleich Null. Aus den Messungen an einem Kristall erhalte ich also 5 Gleichungen für die k_i .

Es ist aber nicht so, daß man alle 5 Koeffizienten aus den Messungen an einem Kristall bestimmen kann. In die Gleichungen für die 4 Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2 gehen nämlich nur die 3 Kombinationen $k_1 - k_2 - k_3$, $k_4 + 2k_5$ und $k_3 + \frac{2}{3}k_4$ ein. Bei transversaler Magnetisierung ist ja $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$. In dem Spezialfall läßt sich der Ausdruck (3) noch erheblich vereinfachen. Er nimmt die Gestalt an:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{q - q_0}{q_0} &= (k_1 - k_2 - k_3)(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2) \\ &\quad \left(k_3 + \frac{2}{3}k_4 \right) (\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) \\ &\quad + (k_4 + 2k_5)(\alpha_1^4\beta_1^2 + \alpha_2^4\beta_2^2 + \alpha_3^4\beta_3^2) - \left(\frac{k_1}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{3} \right). \end{aligned} \right.$$

Nur die drei genannten Konstantenkombinationen sind demnach aus den Fourierkoeffizienten des Transversaleffektes bestimmbar. Für die Differenz des Longitudinaleffektes und des Mittelwertes des Transversaleffektes folgt aus (3)

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_{\text{long.}} - \alpha_0 &= L_0 + L_1 (\beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_2^2 \beta_3^2 + \beta_3^2 \beta_1^2) \\ &+ \frac{15}{8} (k_4 + 2k_5) \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$L_0 = k_1 + k_4 - \frac{k_2}{8} - \frac{k_4}{12}$$

und

$$L_1 = -3k_1 + 3k_2 + \frac{5}{8}k_3 - \frac{71}{24}k_4 + \frac{k_5}{4}$$

gesetzt. $k_4 + 2k_5$ ist aus dem Transversaleffekt schon bekannt.

Für die Anpassung der Differenzen $\left(\frac{\Delta R}{R} \right)_{\text{long.}} - \alpha_0$ an die Messungen sind also noch zwei Größen wählbar, die Größen L_0 und L_1 . Sind ihre Werte dadurch bestimmt, so sind aus diesen und dem aus dem Transversaleffekt folgenden Größen k_1 bis k_5 berechenbar.

2. Experimente und Ergebnisse

Zur Messung wurden 8 Einkristallstäbchen aus Elektrolytnickel benutzt, die nach dem von Lichtenberger angegebenen Verfahren hergestellt worden waren. Sie hatten einen Durchmesser von 3 mm und eine Länge von 7–10 cm. Sie wurden in Pertinaxhalter eingelagert, aus denen sie auch zur Röntgenaufnahme nicht entfernt zu werden brauchten. Die Kristallachse war zugleich die Drehachse der Halter. Die Richtung $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ senkrecht zur Achse wurde durch die Stellung eines auf den Halter aufsteckbaren Zeigers festgelegt. Die kristallographische Orientierung der Kristallachse und der Zeigerichtung senkrecht dazu wurden mittels Röntgenstrahlen aus Laueaufnahmen auf Zylinderfilm bestimmt. Das besonders dazu entwickelte Auswertungsverfahren gestattete eine Bestimmung der Richtungskosinusse $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ mit einem Fehler von nur $\pm 1 \cdot 10^{-3}$ und, wenn der Kosinus nahe bei 1 lag, noch geringer, so daß der Fehler im Winkel kleiner als $0,5^\circ$ war. Eine sehr genaue Bestimmung erwies sich als notwendig für die Anwendbarkeit des angegebenen Analysierverfahrens.

Zur Widerstandsmessung wurde der Spannungsabfall an einem mittleren Stück der Stäbchen von 3–6 cm Länge durch 2 Potentialklemmen aus Silberblech abgegriffen und kompensiert. Als Null-

instrument diente ein Spiegelgalvanometer mit einer Spannungsempfindlichkeit von etwa $1 \cdot 10^{-7}$ Volt/Skt. Die Widerstandsänderungen wurden durch den Ausschlag des Nullinstrumentes gemessen. Die Eichung geschah durch Messung des Ausschlages bei Änderung des Meßstromes J um einen bekannten Betrag. Da der Ausschlag durch die Änderungen von $R \cdot J$ bestimmt ist, ruft eine prozentual gleiche Änderung von Widerstand oder Strom den gleichen Ausschlag hervor. Diese Methode der Eichung hat den Vorteil, richtig zu bleiben, auch wenn beliebige, zeitlich konstante Thermokräfte im Galvanometerkreis vorhanden sind. Sonst gehen diese immer als Fehler ein.

Bei transversaler Magnetisierung wurden die Felder in einem Elektromagneten erzeugt, der breite Polschuhe von 4×8 cm hatte und einen Luftspalt von 7 mm Breite. Bei 6000 Oersted transversal waren die Kristalle stets völlig gesättigt. Zur Sicherheit wurde bei 8600 Oersted gemessen. Es wurde zunächst die Kurvenform des Transversaleffektes gemessen, indem die Widerstandsänderung beim Herausdrehen aus der Lage $\varphi = 0$ im konstanten Feld von 8600 Oersted bestimmt wurde. Es wurde stets der Kristall herausgedreht und wieder zurückgedreht und kontrolliert, ob der Ausschlag wieder zurückgeht. Jede solche Messung wurde mehrfach wiederholt. Gemessen wurde für alle Winkel in Intervallen von 5° zwischen -140° und $+140^\circ$. Wegen der Symmetrie muß die Stellung α und $\alpha - 180^\circ$ denselben Wert ergeben, was innerhalb der Meßfehler auch der Fall war. Danach wurde die relative Widerstandsänderung bei Magnetisierung vom entmagnetisierten Zustand bis zur Sättigung transversal in Richtung $\varphi = 0$ gemessen. Dazu wurde der Kristallhalter aus dem Elektromagneten entfernt und der Kristall im longitudinalen Wechselfeld entmagnetisiert. Das Feld im Elektromagneten wurde dann auf Null gebracht, wozu wegen der Remanenz des Kerns ein kleiner Gegenstrom nötig war. Alsdann wurde nach Einbringen des Kristalls und Herstellung der Kompensation der Ausschlag beim Einschalten des Magnetfeldes gemessen. Dabei wurde der Meßstrom kleiner gehalten als bei den vorigen Differenzmessungen, um eine Magnetisierung des Kristalls durch das Feld des Stromes zu vermeiden. Er betrug hierbei 0,25 Amp., bei den anderen Messungen etwa 1 Amp. Ähnlich wurde auch der Longitudinaleffekt in einer Spule gemessen. Dabei reichten 1000 Oersted zur Sättigung aus.

Die Ergebnisse der relativen Widerstandsänderungen in der Sättigung bei transversalem Feld zeigt Abb. 1. Die Sättigungswerte des Longitudinaleffektes zeigt Tab. 1, Spalte 2. Die relativen Widerstandsänderungen liegen alle in der Größenordnung von $1-2\%$.

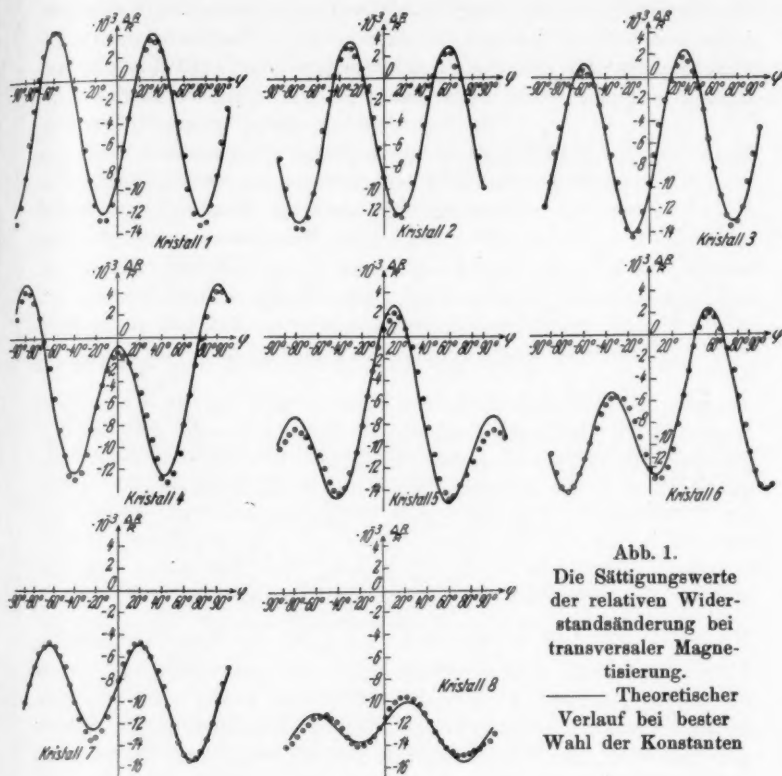


Abb. 1.
Die Sättigungswerte
der relativen Wider-
standsänderung bei
transversaler Magne-
tisierung.
— Theoretischer
Verlauf bei bester
Wahl der Konstanten

Tabelle 1

Die Sättigungswerte der longitudinalen Widerstandsänderung, die Mittelwerte des Transversaleffektes und die Nullpunktsabweichung δ

Kristall Nr.	Sättigungswerte der relativen Widerstandsänderung		$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\text{long}} - a_0$ Korrigiert	Nullpunkts- abweichung δ
	Longitudinal	Transversal. Mittelwert		
1	$18,0_4 \cdot 10^{-3}$	$-3,91 \cdot 10^{-3}$	$21,0_4 \cdot 10^{-3}$	$0,0 \cdot 10^{-3}$
2	$17,3_3 \cdot 10^{-3}$	$-4,76 \cdot 10^{-3}$	$21,1_5 \cdot 10^{-3}$	$-0,8 \cdot 10^{-3}$
3	$17,5_0 \cdot 10^{-3}$	$-5,85 \cdot 10^{-3}$	$22,4_1 \cdot 10^{-3}$	$-1,3 \cdot 10^{-3}$
4	$18,5_3 \cdot 10^{-3}$	$-5,16 \cdot 10^{-3}$	$22,7_6 \cdot 10^{-3}$	$-0,6 \cdot 10^{-3}$
5	$17,4_3 \cdot 10^{-3}$	$-8,31 \cdot 10^{-3}$	$24,8_6 \cdot 10^{-3}$	$-3,0 \cdot 10^{-3}$
6	$17,2_3 \cdot 10^{-3}$	$-7,31 \cdot 10^{-3}$	$23,5_0 \cdot 10^{-3}$	$-2,7 \cdot 10^{-3}$
7	$18,3_3 \cdot 10^{-3}$	$-9,49 \cdot 10^{-3}$	$26,9_3 \cdot 10^{-3}$	$-2,7 \cdot 10^{-3}$
8	$18,4_3 \cdot 10^{-3}$	$-12,64 \cdot 10^{-3}$	$30,1_9 \cdot 10^{-3}$	$-3,9 \cdot 10^{-3}$

Der Meßfehler, beurteilt nach der Streuung der einzelnen Messungen, kann etwa 0,03% betragen. Abb. 2 zeigt die Verteilung der Orientierungen der Kristallachsen, eingetragen in einen Ausschnitt aus dem Wulffschen Netz. Man sieht, daß im Transversaleffekt die

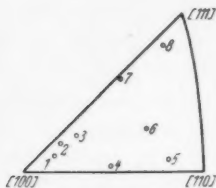


Abb. 2

Fourierglieder mit der Periode 90° um so stärker hervortreten, je näher die Achse des Kristalls der tetragonalen Achse liegt. Die Kurven wurden einer Fourieranalyse nach der Rungeschen Methode unterworfen. Aus den Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2 der Glieder mit $\cos 2\varphi, \cos 4\varphi, \sin 2\varphi$ und $\sin 4\varphi$ wurden nach der beschriebenen Methode die Größen

$$k_1 - k_2 - k_3, k_4 + 2k_5 \text{ und } k_3 + \frac{2}{3}k_4 \text{ bestimmt.}$$

Da jeder Kristall 4 Koeffizienten liefert, liegen von den 8 Kristallen insgesamt 32 Gleichungen vor für die Bestimmung der drei zur Anpassung zur Verfügung stehenden Konstantenkombinationen. Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab

$$k_1 - k_2 - k_3 = 18,8 \cdot 10^{-3}$$

$$k_4 + 2k_5 = -14,3 \cdot 10^{-3}$$

$$k_3 + \frac{2}{3}k_4 = -68,0 \cdot 10^{-3}$$

Mit diesen Zahlen wurden nun rückwärts die Transversaleffektkurven berechnet. Das Ergebnis ist in den ausgezogenen Kurven der Abb. 1 dargestellt. Für den Mittelwert wurde dabei der gemessene Wert a_0 benutzt. Es ist also nur die Kurvenform zu vergleichen. Der Mittelwert ist bei den theoretischen Kurven der gleiche wie bei den Meßpunkten. Die Übereinstimmung ist im großen und ganzen recht befriedigend. An einigen Stellen treten jedoch deutlich systematische Fehler auf. So werden z. B. bei allen Kurven die Maxima zu spitz und die Minima zu flach wiedergegeben, ein Verhalten, was hauptsächlich dadurch hervorgerufen wird, daß in den theoretischen Kurven keine Komponenten mit $\cos 8\varphi$ und $\sin 8\varphi$ mehr enthalten sind. Bei Kristall 8 ist das Fehlen der Glieder mit $\cos 6\varphi$ und $\sin 6\varphi$ ebenfalls bemerkbar. Diese Mängel sind darin begründet, daß wir im Ansatz die höheren als vierten Potenzen der α_i vernachlässigt hatten. Eine Analyse bei Berücksichtigung von noch mehr Gliedern ergab in der Tat, daß sich dann die Messungen noch wesentlich besser darstellen ließen, so daß also auch die Bestimmung noch höherer Koeffizienten auf diesem Wege nicht aussichtslos erscheint. Es ist jedoch zu bemerken, daß bei dem Versuch, eine Anpassung mit Berücksichtigung von mehr Glie-

dern zu erzielen, sich die Koeffizienten der niederen Glieder gegenüber einer Anpassung mit weniger Gliedern verändern. Wenn man von einer besten Näherung die höheren Glieder streift, ist der Rest keine beste Näherung mehr. Das macht einen Vergleich verschieden hoher Näherungen sehr schwierig.

Zur vollständigen Bestimmung der Koeffizienten in der angegebenen Näherung ist weiterhin die Differenz zwischen Longitudinaleffekt und Mittelwert des Transversaleffektes heranzuziehen. An den unmittelbar gemessenen Werten wurde dabei noch eine Korrektur angebracht. Nach E. Englert¹⁾ ist bei Zimmertemperatur bei Nickel in starken Feldern eine mit dem Feld lineare Widerstandsabnahme vorhanden, die auf der Beeinflussung der spontanen Magnetisierung beruht. Sie ist im Längs- und Quersfeld gleich und beträgt

$$\frac{d}{dH} \left(\frac{\Delta R}{R} \right) = -21,0 \cdot 10^{-8} [\text{Oersted}]^{-1}.$$

Wir wollen annehmen, daß sie auch von der Kristallrichtung unabhängig ist. Orientierende Messungen ergaben, daß das angenähert richtig ist. Nun ist bei diesen Messungen der Sättigungswert des Transversaleffektes bei einer Feldstärke von 8600 Oersted, also einer inneren Feldstärke von $8600 - 2\pi J_s = 5500$ Oersted gemessen worden, der Longitudinaleffekt dagegen bei 1000 Oersted. Infolgedessen ist die aus den Experimenten entnommene Differenz

$$\left(\frac{\Delta R}{R} \right)_{\text{long}} - a_0 \text{ um } 21,0 \cdot 10^{-8} \cdot 4500 = 0,94 \cdot 10^{-3}$$

größer als die eigentlich interessierende Größe der Differenzen zwischen den auf das Feld null extrapolierten Werte dieser Größen. Deshalb wurde dieser Unterschied als Korrektur berücksichtigt. Die Anpassung dieser Differenz an die Messungen liefert die weiteren Konstantenkombinationen

$$L_1 = k_1 - \frac{k_2}{8} + \frac{11}{12} k_4 = 19,6 \cdot 10^{-3}$$

$$L_2 = -3k_1 + 3k_2 + \frac{5}{8} k_3 - \frac{71}{24} k_4 + \frac{k_5}{4} = 29,2 \cdot 10^{-3}$$

Zum Vergleich der Genauigkeit der Wiedergabe ist in Abb. 3 die Größe

$$\left(\frac{\Delta R}{R} \right)_{\text{long}} - a_0 - \frac{15}{8} (k_4 + 2k_5) \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2$$

als Ordinate aufgetragen über

$$\beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_2^2 \beta_3^2 + \beta_3^2 \beta_1^2$$

1) E. Englert, Ann. d. Phys. [5] 14. S. 589. 1932.

als Abszisse. $k_4 + 2k_5$ ist ja aus dem Transversaleffekt bekannt. Die Gerade ist der theoretische Verlauf mit obigen Werten von L_0 und L_1 .

Die Übereinstimmung ist befriedigend, doch sind die Abweichungen teilweise noch größer als die Meßfehler. Durch Hinzu-

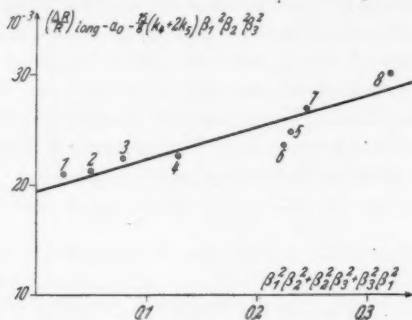


Abb. 3

nehmen noch höherer Glieder in der Entwicklung kann man auch hier bessere Anpassung erreichen.

Aus den angegebenen Werten ergibt sich für die Konstanten

$$k_1 = 65,4 \cdot 10^{-3}$$

$$k_2 = 26,6 \cdot 10^{-3}$$

$$k_3 = -32 \cdot 10^{-3}$$

$$k_4 = -54 \cdot 10^{-3}$$

$$k_5 = 20 \cdot 10^{-3}$$

Nunmehr ist man auch in der Lage, die Abweichung des Widerstandes im entmagnetisierten Zustand von demjenigen bei Gleichverteilung der Magnetisierungsrichtungen auf die leichten Richtungen auszurechnen.

Mit obigen Werten der Konstanten kann ich für jeden Kristall $\left(\frac{e - e_0}{e_0}\right)_{\text{long}}$ berechnen und mit dem gemessenen $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\text{long}}$ vergleichen. Die Differenz gibt die Nullpunktabweichungen δ , die in Tab. 1 aufgeführt sind. Es zeigt sich, daß sie sämtlich negativ sind und um so größer, je näher die Stabachse einer [111]-Richtung liegt. Daß in dem Falle, wo die Stabachse parallel [100] liegt, keine Abweichung von der Gleichverteilung auftritt, ist verständlich, denn dann sind ja alle leichten Richtungen in gleicher Lage relativ zu den äußeren Kristallbegrenzungen. Ist dagegen die Stabachse parallel [111], so ist diese eine leichte Richtung ausgezeichnet. Die

Messungen zeigen, daß diese im entmagnetisierten Zustand stets von der Magnetisierung bevorzugt wird. Die Abweichungen sind immerhin so erheblich, daß die Anpassung an die Messungen wesentlich schlechter möglich gewesen wäre, wenn man die Gleichverteilung im Ausgangszustand angenommen hätte. Die Bevorzugung der in der Stabachse liegenden leichten Richtung scheint im übrigen eine allgemeine Erscheinung zu sein. So ist z. B. bei den Magnetostruktionsmessungen an Eiseneinkristallen von S. Kaya und T. Takaki¹⁾ in der Kurve für $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_{\text{long}}$ als Funktion von J bei einem [100]-Kristallstab zu beobachten, daß bis zu einer Magnetisierung von weit über $\frac{1}{3} J$, die Magnetostruktion genau null bleibt, ein Verhalten, was nur dadurch zu deuten ist, daß schon im Ausgangszustand die in der Meßrichtung, also der Stabachse liegende [100]-Richtung bevorzugt war.

Die hier erhaltenen Ergebnisse über die Größe der Konstanten k_1 bis k_5 seien schließlich noch mit den Ergebnissen von S. Kaya²⁾ verglichen. Wertet man die Messungen von S. Kaya in der beschriebenen Weise aus, so erhält man für die Konstanten

$$\begin{aligned} k_1 &= 63 \cdot 10^{-3} \\ k_2 &= 29 \cdot 10^{-3} \\ k_3 &= -36 \cdot 10^{-3} \\ k_4 &= -51 \cdot 10^{-3} \\ k_5 &= 14 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Diese Zahlenwerte stimmen mit den von mir ermittelten Werten leidlich überein. Sie sind aber wohl nicht so genau. Denn da S. Kaya nur an drei Kristallen mit ganz speziellen Achsenrichtungen den Effekt gemessen hat, ist die innere Kontrolle bei ihm bei weitem nicht so scharf wie bei den hier mitgeteilten Messungen. Bei S. Kaya stehen zur Ermittlung der fünf Konstanten nur sechs Gleichungen zur Verfügung, während bei mir die beste Lösung von insgesamt 40 Gleichungen ermittelt worden ist.

Zum weiteren Vergleich wurden nun noch mit den von mir gemessenen Konstanten die Transversaleffekte in den von S. Kaya gemessenen Richtungen berechnet. Abb. 4 zeigt den Vergleich. Dabei ist wieder der Mittelwert der gerechneten und gemessenen Kurven gleichgesetzt worden. Die Differenz zwischen dem Longi-

1) S. Kaya u. T. Takaki, Anniversary Volume dedicated to Prof. K. Honda, S. 314; Sc. Rep. Toh. University 1936.

2) S. Kaya, a. a. O.

tudinaleffekt und dem Mittelwert des Transversaleffektes ist in Tab. 2 verglichen. Die noch vorhandenen Abweichungen sind z. T. darauf zurückzuführen, daß hier in dem zur Anpassung benutzten Ansatz (3) nur Glieder von höchstens viertem Grade in α_i benutzt worden sind, Versucht man an meinen Messungen eine Anpassung mit Berück-

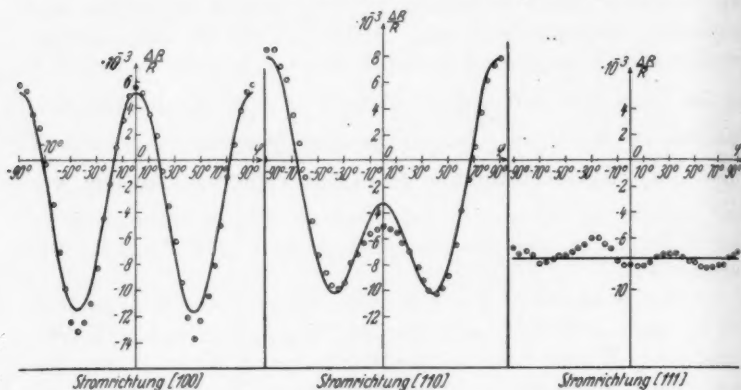


Abb. 4

sichtigung von mehr Gliedern, so wird auch die Übereinstimmung der berechneten Kurven mit denen von S. Kaya merklich besser.

Tabelle 2

Differenz der Sättigungswerte der relativen Widerstandsänderung longitudinal und dem Mittelwert transversal. Vergleich mit den errechneten Werten

Kristall	Experiment. S. Kaya	Errechnet
[100]	$22,9 \cdot 10^{-3}$	$19,6 \cdot 10^{-3}$
[110]	$26,9 \cdot 10^{-3}$	$26,9 \cdot 10^{-3}$
[111]	$31,8 \cdot 10^{-3}$	$28,3 \cdot 10^{-3}$

Aus den obigen Konstanten läßt sich nun auch der am Polykristall zu erwartende Widerstandseffekt berechnen. Für die relative Widerstandsänderung zwischen dem Zustand mit isotroper Verteilung der Magnetisierung auf alle leichten Richtungen und dem unter dem Winkel ϑ zum Strom bis zur Sättigung magnetisierten Zustand findet man für ein polykristallines Material mit regelloser Verteilung der Kristallite durch eine einfache Mittelung aus (3)

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = A + B \cdot \cos^2 \vartheta$$

wobei

$$B = \frac{2}{5} k_1 + \frac{3}{5} k_2 + \frac{12}{35} k_4 + \frac{3}{35} k_5 = 25,4 \cdot 10^{-3}$$

und

$$A = -\frac{2}{15} k_1 - \frac{k_2}{5} - \frac{2}{15} k_3 - \frac{4}{35} k_4 - \frac{k_5}{35}$$

ist. B ist die Differenz der relativen Widerstandsänderung bis zur Sättigung longitudinal und transversal. Sie ist von E. Englert¹⁾ an polykristallinem Nickel zu $30,5 \cdot 10^{-3}$ ermittelt worden, während sich aus meinen Messungen $B = 25,4 \cdot 10^{-3}$ und aus den Kayaschen Ergebnissen $B = 25,6 \cdot 10^{-3}$ ergibt. Ob diese verhältnismäßig schlechte Übereinstimmung in der Ungenauigkeit der Einkristallkonstanten begründet ist oder auf einen systematischen Unterschied infolge der näherungsweisen Auswertung der Einkristallmessungen hinweist, muß dahingestellt bleiben.

Es fällt auf, daß A nicht gleich $-\frac{1}{3} B$ ist. Das wäre der Fall, wenn in dem für ρ_0 gewählten Ausgangszustand die Magnetisierung gleichmäßig auf alle Richtungen insgesamt verteilt wäre, nicht über alle leichten Richtungen. Wegen des Vorhandenseins der Konstanten k_3 ist der Widerstand in beiden Zuständen nicht gleich. Bei Mittelung über alle Richtungen α_i erhält man aus (3)

$$\frac{\overline{\rho - \rho_0}}{\rho_0} = -\frac{2}{15} k_3 = +4,3 \cdot 10^{-3}$$

Diese Widerstandsänderung ist ziemlich groß. Bei einer Probe aus reinem Nickel, bei der die inneren Spannungen groß gegen den Einfluß der Kristallenergie und isotrop sind, sollte demnach durch ein Anlassen, das die inneren Spannungen klein gegen die Kristallenergie werden läßt, eine Widerstandsabnahme von etwa 0,4 % auftreten, wenn sonst keine weiteren Ursachen für Widerstandsänderungen vorhanden sind.

Zusammenfassung

1. Es wird durch Symmetriebetrachtungen die allgemeine Form der Abhängigkeit des Widerstandes von kubischen ferromagnetischen Kristallen von Strom- und Magnetisierungsrichtung aufgestellt. Durch Reihenentwicklung und Vernachlässigung der höheren Glieder wird ein zur Anpassung an die Experimente geeigneter Näherungsausdruck mit 5 verfügbaren Konstanten gewonnen. Es wird gezeigt, wie man durch Messungen des Sättigungswertes der transversalen und longitudinalen Widerstandsänderung an Einkristallstäbchen mit

1) E. Englert, Ann. d. Phys. [5] 14. S. 589. 1932.

beliebiger kristallographischer Orientierung der Achsen die Konstanten bestimmen kann.

2. Das Verfahren wird angewandt auf Widerstandsmessungen an 8 Nickelkristallen. Es wird gezeigt, daß die Anpassung mit guter innerer Übereinstimmung möglich ist. Als Ergebnis folgt für die relative Widerstandsänderung für die Stromrichtung $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ bei Magnetisierung in Richtung $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bis zur Sättigung von dem Zustand, wo die Magnetisierungseinrichtungen auf alle leichten Richtungen gleichmäßig verteilt sind:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = & 65,4 \cdot 10^{-3} \left(\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 - \frac{1}{3} \right) \\ & + 26,6 \cdot 10^{-3} (2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + 2 \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + 2 \alpha_3 \alpha_1 \beta_3 \beta_1) \\ & - 32 \cdot 10^{-3} \left(s - \frac{1}{3} \right) \\ & - 54 \cdot 10^{-3} \left(\alpha_1^4 \beta_1^2 + \alpha_2^4 \beta_2^2 + \alpha_3^4 \beta_3^2 + \frac{2}{3} s - \frac{1}{3} \right) \\ & + 20 \cdot 10^{-3} (2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 \beta_1 \beta_2 + 2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1^2 \beta_2 \beta_3 + 2 \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_3 \beta_1) \\ s = & \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 \end{aligned}$$

Vorliegende Arbeit ist eine verkürzte Wiedergabe einer Arbeit, die als Diplomarbeit an der Technischen Hochschule Berlin am Institut für theoretische Physik im Jahre 1934 ausgeführt wurde und durch einige neuere theoretische Überlegungen vervollständigt worden ist. Herrn Prof. Dr. R. Becker bin ich für Überlassung der Institutsmittel sowie für zahlreiche Diskussionen und sein förderndes Interesse zu großem Danke verpflichtet.

Göttingen, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 9. März 1938)

Schallabsorption und -dispersion in Flüssigkeiten

Von H. O. Kneser

(Mit 2 Abbildungen)

Zahlreiche Messungen der Schallabsorption in Flüssigkeiten zeigen übereinstimmend, daß die klassische Theorie, die innere Reibung und Wärmeleitung als alleinige Ursachen der Schallabsorption annimmt, zur Deutung nicht ausreicht: Es stellt sich zwar häufig im Einklang mit der klassischen Theorie heraus, daß der Absorptionskoeffizient mit dem Quadrat der Frequenz ansteigt, und in einem Fall (H_2O)^{*)} wird auch seine relative Änderung mit der Temperatur in Übereinstimmung mit der klassischen Theorie gefunden, jedoch ergeben sich die Absolutbeträge der Absorptionskoeffizienten in fast allen Fällen viel zu groß.

Es ist versucht worden¹⁾, diese starke Absorption durch die Annahme zu deuten, daß Flüssigkeiten für hochfrequente Schallwellen trübe Medien darstellen, die die Schallwellen durch Streuung stark schwächen. Eine solche ist in der Tat von Biquard²⁾ nachgewiesen worden, allerdings in einem Betrage, der wohl kaum zur Erklärung der Absorption ausreicht. Die theoretische Behandlung konnte noch nicht so weit getrieben werden, daß ein Vergleich mit der Erfahrung möglich wird.

Nun ist kürzlich die Messung der Schallabsorption in einer 1atomigen Flüssigkeit, dem Quecksilber, gelungen, und es hat sich gezeigt, daß hier der Absorptionskoeffizient in guter Übereinstimmung mit dem nach der klassischen Theorie berechneten ist³⁾. Übereinstimmung mit der klassischen Theorie bei 1atomigen, Überschreitung der klassischen Absorptionswerte bei mehratomigen Substanzen ist aber gerade das, was man auch bei Gasen findet. Daher erscheint der Versuch gerechtfertigt, die gleichen Überlegungen, die zur Klärung der Schallabsorption und -dispersion in Gasen geführt haben¹⁰⁻¹²⁾, auch auf Flüssigkeiten anzuwenden.

Im folgenden soll gezeigt werden, (I.) daß diese Überlegungen sich derart verallgemeinern lassen, daß sie auch für Flüssigkeiten

*) Hochstehende Ziffer deutet auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Abhandlung hin.

gültig sind, (II.) daß die experimentellen Daten sich durch die so gewonnenen Formeln recht befriedigend darstellen lassen, und es sollen (III.) daraus einige Schlüsse auf die Struktur der untersuchten Flüssigkeiten gezogen werden.

I. Verallgemeinerte Theorie der Schallabsorption und -dispersion

Wir nehmen an, daß — wie in Gasen — die Schallabsorption hervorgerufen wird nicht nur durch innere Reibung und Wärmeleitung (klassische Absorption), sondern auch durch die endliche Einstelldauer des thermischen Gleichgewichts (molekulare Absorption). Die molekulare Absorption kommt so zustande*): Wenn die Einstelldauer von der Größenordnung der Schallschwingungsdauer ist, so sind die unter dem Einfluß der Schallwellen durchlaufenen Zustände keine Gleichgewichtszustände und die Zustandsänderungen nicht mehr reversibel. Vielmehr wird dauernd Energie der Schallwelle entzogen und irreversibel in Wärme verwandelt. Wir nehmen ferner an, daß nur *eine* Energieform (z. B. die Energie einer bestimmten Molekülschwingung oder die zur Anpassung des Dissoziationsgrades an einen veränderten Zustand benötigte Energie) eine endliche, d. h. mit der Schallschwingungsdauer vergleichbare Einstelldauer zeigt. n sei die Anzahl der mit einem Quant dieser Schwingung behafteten bzw. die Anzahl der dissoziierten Moleküle pro Mol. Die zeitliche Ableitung von n (\dot{n}) hängt von den Zustandsgrößen und möglicherweise außerdem von n ab. Wir tragen dem durch den Ansatz Rechnung:

$$\dot{n} = \Phi(v, T, n),$$

woraus sich durch Variation ergibt:

$$(1) \quad \Delta \dot{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Delta n.$$

Die linke Seite kann auch geschrieben werden $\frac{\partial}{\partial t} \Delta n$, und für rein periodische Vorgänge ist die Differentiation nach der Zeit durch Multiplikation mit $i\omega$ (ω = Kreisfrequenz der Schallwelle) zu ersetzen:

$$(1a) \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \Delta T + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - i\omega \right) \Delta n.$$

Zweitens sei die Existenz einer Zustandsgleichung vorausgesetzt:

$$(2) \quad p = p(v, T, n),$$

*) Ausführlich dargestellt z. B. ¹⁹⁾.

wobei durch die Zustandsvariable n berücksichtigt ist, daß bei dissoziierenden Substanzen die Molekühlzahl bei einer Zustandsänderung nicht konstant bleibt. Nach Variation:

$$(2a) \quad \Delta p = \frac{\partial p}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial p}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial p}{\partial n} \Delta n.$$

Drittens muß der Energiesatz gelten, und zwar in der Form:

$$(3) \quad -p \Delta v = \Delta u(v, T, n),$$

da für die hohen Schallfrequenzen, die hier in Frage kommen, die Adiabase ($\Delta q = 0$) sicher gewährleistet ist; oder umgestellt:

$$(3a) \quad 0 = \left(\frac{\partial u}{\partial v} + p \right) \Delta v + \frac{\partial u}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial u}{\partial n} \Delta n.$$

Wir benützen endlich die Eulersche Differentialgleichung der Bewegung für eine ebene Welle mit den bei einer Schallwelle üblichen Vernachlässigungen und die Kontinuitätsgleichung, aus welchen sich ergibt*):

$$(4) \quad \Re^2 = - \frac{v}{\varrho} \frac{\Delta p}{\Delta v}.$$

\Re^2 ist ein komplexer Ausdruck, dessen Realteil bei nicht zu großer Dämpfung die Phasengeschwindigkeit (V) der Schallwelle angibt, während der Quotient aus Imaginär- und Realteil, das ist der Winkel der Phasenverschiebung zwischen Druck und Verdichtung, den Absorptionskoeffizienten bestimmt. Es sei μ der Absorptionskoeffizient der Intensität pro Wellenlänge, definiert durch

$$I_x = I_0 \cdot e^{-\mu \frac{x}{\lambda}},$$

so ist:

$$(4a) \quad V^2 = - \frac{v}{\varrho} \Re \left| \frac{\Delta p}{\Delta v} \right|$$

und

$$(4b) \quad \mu = 2\pi \frac{\Im \left| \frac{\Delta p}{\Delta v} \right|}{\Re \left| \frac{\Delta p}{\Delta v} \right|}.$$

Aus (1a), (2a) und (3a) leitet man mittels elementarer Operationen leicht ab

$$(5) \quad \frac{\Delta p}{\Delta v} = \frac{a_1 + i\omega a_2}{a_3 + i\omega a_4}.$$

*) Vgl. hierzu *) S. 502.

Dabei ist:

$$(5a) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial T} + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \frac{\partial p}{\partial n} p \\ \quad - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial T} - \frac{\partial \Phi}{\partial T} \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial T} p, \\ a_2 = \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial T} \cdot p, \\ a_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial T} - \frac{\partial \Phi}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial n}, \quad a_4 = - \frac{\partial u}{\partial T}. \end{cases}$$

Wegen (4a) ist dann:

$$(6) \quad V^2 = - \frac{v}{\varrho} \frac{a_1 a_2 + a_3 a_4 \omega^2}{a_3^2 + a_4^2 \omega^2}$$

und wegen (4b)

$$(7) \quad \mu = \frac{2\pi(a_2 a_3 - a_1 a_4) \omega}{a_1 a_3 + a_2 a_4 \omega^2}.$$

Der Verlauf von V^2 und μ als Funktion von $\log \omega$ ist in Abb. 1 wiedergegeben^{*)}. Die dort definierten charakteristischen Größen V_0 , V_∞ , ω_w , μ_m und ω_m lassen sich ohne weiteres aus (6) und (7) berechnen:

$$(8) \quad \begin{cases} V_0^2 = - \frac{v}{\varrho} \frac{a_1}{a_3}; & V_\infty^2 = - \frac{v}{\varrho} \frac{a_2}{a_4}; & \omega_w = \frac{a_3}{a_4}; \\ \mu_m = \pi \left(\sqrt{\frac{a_2 a_3}{a_1 a_4}} - \sqrt{\frac{a_1 a_4}{a_2 a_3}} \right); & \omega_m = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a_3 a_4}}. \end{cases}$$

Zwischen ihnen bestehen Beziehungen:

$$(9) \quad \frac{\omega_w}{\omega_m} = \frac{V_\infty}{V_0} (> 1)$$

und

$$(10) \quad V_\infty^2 - V_0^2 = \frac{1}{\pi} \mu_m V_0 V_\infty,$$

also angenähert

$$(11) \quad \frac{V_\infty - V_0}{V} \sim \frac{\mu_m}{2\pi}.$$

^{*)} Daß der Grenzwert von V^2 nach hohen Frequenzen größer ist als der nach tiefen ($V_\infty^2 > V_0^2$), läßt sich aus den Formeln nicht ohne weiteres entnehmen, wird aber durch folgende Überlegung sehr wahrscheinlich gemacht: Bei extrem schnellen Zustandsänderungen (hohen Frequenzen) wird nur noch der Energieinhalt der translatorischen Freiheitsgrade den Zustandsänderungen folgen können. Hinsichtlich der scheinbaren spezifischen Wärme wird sich daher die Substanz wie ein latomiges Gas verhalten, C_p/C_v also dem höchst möglichen Wert, nämlich $5/3$ zustreben. Somit wird auch V^2 , das ja proportional C_p/C_v ist, mit wachsender Frequenz ansteigen. — Da C_p/C_v auch bei $\omega = 0$ den Wert 1 nicht unterschreiten kann, zeigt diese Überlegung ferner, daß $V_\infty^2:V_0^2$ nicht größer als $5/3$ sein kann, die Schallgeschwindigkeitsänderung also 29% nie überschreiten wird.

Es wird sich im folgenden als zweckmäßig erweisen, V^2 und μ durch die charakteristischen Größen auszudrücken und die Frequenz ν an Stelle der Kreisfrequenz $\omega (= 2\pi\nu)$ zu benutzen:

$$(12) \quad V^2 - V_0^2 = (V_\infty^2 - V_0^2) \frac{\left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^2}{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^2},$$

$$(13) \quad \mu = 2\mu_m \frac{\frac{\nu}{\nu_m}}{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^2}.$$

Für den in den experimentellen Untersuchungen häufig angegebenen Quotienten $\frac{\alpha}{\nu^2}$ (α = Absorptionskoeffizient pro Längeneinheit = $\frac{\mu}{\lambda}$) ergibt sich:

$$(14) \quad \frac{\alpha}{\nu^2} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{1}{\nu^2} = \frac{2}{V} \frac{\mu_m}{\nu_m} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^2}.$$

Der Funktionsverlauf ist in Abb. 1 dargestellt.

Bei kleinen Frequenzen $\left(\frac{\nu^2}{\nu_m^2} \ll 1\right)$

wird:

$$(13') \quad \mu = 2 \frac{\mu_m}{\nu_m} \cdot \nu$$

und

$$(14') \quad \frac{\alpha}{\nu^2} = \frac{2}{V} \cdot \frac{\mu_m}{\nu_m}.$$

Unter der gleichen Voraussetzung

wird wegen (9) erst recht $\frac{\nu^2}{\nu_w^2} \ll 1$

und daher:

$$(12') \quad V^2 - V_0^2 = (V_\infty^2 - V_0^2) \left(\frac{\nu}{\nu_w}\right)^2,$$

d. h. V^2 weicht nur sehr wenig von V_0 ab, so daß α/ν^2 nahezu frequenzunabhängig ist.

Unter der Voraussetzung $\nu^2 \ll \nu_m^2$ besteht ferner eine einfache Beziehung zwischen Schalldispersion und -absorption: Wendet man (10) auf (12') an und eliminiert man ν_w mit Hilfe von (9), so erhält man:

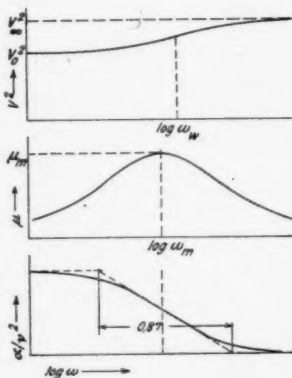


Abb. 1. Frequenzabhängigkeit von V , μ und α/ν^2

$$V^2 - V_0^2 = \frac{1}{\pi} \mu_m V_0 V_\infty \cdot \left(\frac{1}{v_m} \frac{V_0}{V_\infty} \right)^2 \cdot v^2$$

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\mu_m}{v_m} \frac{1}{v_m} \left(\frac{V_0}{V_\infty} \right)^2 \frac{V_\infty}{V + V_0} \cdot v^2$$

und daraus, wenn $V_0 \approx V_\infty$, mittels (14'):

$$(15') \quad \frac{V - V_0}{V_0} \approx \frac{V}{4\pi} \frac{\alpha}{v^2} \frac{1}{v_m} \cdot v^2.$$

Die hier abgeleiteten Dispersions- und Absorptionsformeln (12) und (13) sind vom gleichen Bau wie die für Gase geltenden [vgl. ¹⁰ (19) und ¹² (13)]. Es zeigt sich, daß für hinreichend kleine Frequenzen α proportional v^2 wird, wie nach der klassischen Theorie, allerdings im allgemeinen mit einem wesentlich größeren Proportionalitätsfaktor. Da die fünf charakteristischen Größen (8) untereinander durch zwei Gl. [(9) und (10)] verknüpft sind, reduziert sich die Anzahl der verfügbaren Konstanten auf drei, z. B. V_0 , μ_m und v_m , von denen V_0 meist bekannt ist. Über die Größe von μ_m und v_m lassen sich im allgemeinen bei Flüssigkeiten von vornherein nur qualitative Aussagen machen (vgl. S. 286). Bei Gasen dagegen kann μ_m aus dem Gesamtbetrag der spezifischen Wärme und demjenigen Anteil, der eine endliche Einstelldauer besitzt, exakt berechnet werden.

II. Vergleich mit den experimentellen Daten

In Abb. 2 sind diejenigen Schallabsorptionsdaten zusammengestellt, die als einigermaßen gesichert gelten können; und zwar wie üblich in der Form α/v^2 als Funktion von $\log v$. Die Genauigkeit schwankt zwischen ± 2 und $\pm 10\%$. Die Vergleichbarkeit der Messungen verschiedener Autoren wird dadurch geschmälert, daß häufig genaue Temperaturangaben fehlen, und durch die Tatsache, daß die Absorption sehr stark vom Reinheitsgrad des verwendeten Materials abhängt³). Der klassische Absorptionskoeffizient in der frequenzunabhängigen Form α_{kl}/v^2 ist durch eine gestrichelte Gerade oder schriftlich angegeben.

Hg zeigt, wie bereits erwähnt, extrem geringe Absorption, nur unwesentlich stärker als nach der klassischen Theorie.

Bei H_2O , CS_2 , $CHCl_3$, C_6H_6 , $C_6H_5CH_3$, $C_6H_4(CH_3)_2$, CH_3COCH_3 überschreiten die Abweichungen vom Mittelwert kaum die angegebenen Fehlergrenzen, so daß α/v^2 als frequenzunabhängig anzusprechen ist.

CCl_4 zeigt nach den eingetragenen Absorptionswerten ein Verhalten, das mit unseren Überlegungen unvereinbar ist. Es muß allerdings bemerkt werden, daß die beiden Absorptionswerte zwischen 10^6 und 10^7 Hz die niedrigsten sind, die mit dem Verfahren von Claey's,

Errera und Sack gemessen wurden⁷⁾, und es erscheint nicht unmöglich, daß dies Verfahren bei sehr schwacher Absorption mit einem systematischen Fehler behaftet ist*).

CH_3COOH , $\text{CH}_3\text{COOCH}_3$ und $\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$ zeigen den erwarteten Abfall von α/ν^2 nach hohen Frequenzen. Bei den beiden letzteren ist der punktierte Teil der Kurve mit Meßpunkten dicht

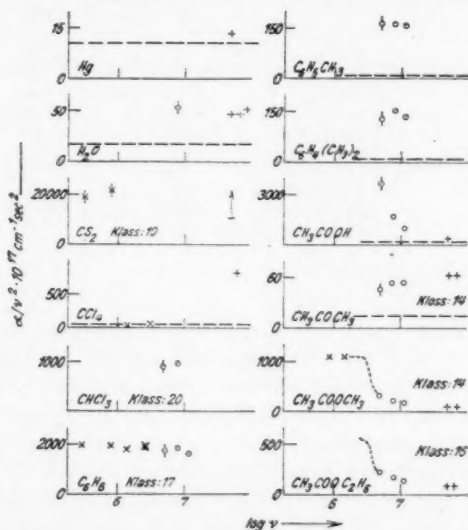


Abb. 2. Schallabsorption in 12 Flüssigkeiten nach Claeys, Errera und Sack⁷⁾, ⁸⁾ (x), nach Biquard⁹⁾ (o) und nach Bär¹⁾ (+)

belegt⁸⁾. Der Abfall ist wesentlich steiler als nach Formel (1) und Abb. 1 zu erwarten. Wenn sich dies als reell erweist, so ist darin eine ernsthafte Schwierigkeit für unseren Deutungsversuch zu erblicken.

Bei den sechs an zweiter Stelle genannten Substanz ist α/ν^2 im durchmessenen Bereich frequenzunabhängig, also wegen (14') $\nu^2 \ll \nu_m^2$. Zu erwarten ist ein Absinken von α/ν^2 nach höheren Frequenzen, woraus man auf die Lage des Wendepunkts (ν_m) schließen könnte. Da die Abweichungen von der Konstanz innerhalb der Fehlergrenzen bleiben, lassen sich aber nur untere Grenzwerte für ν_m

*) Der Verf. ist Herrn Prof. P. Cermak zu Dank verpflichtet für die Mitteilung, daß Herr Buss, Gießen, mit einem neuartigen Verfahren im gleichen Frequenzbereich α/ν^2 von der gleichen Größenordnung wie bei der hohen Frequenz gefunden hat, im Gegensatz zu Claeys, Errera und Sack.

und [mittels (14')] für μ_m angeben. Diese sind in Spalte 4 und 5 der Tab. 1 zusammengestellt. Sie sind berechnet aus dem wahrscheinlichsten α/ν^2 -Werten nach Abzug von α_{kl}/ν^{2*} (Spalte 3).

Tabelle 1

Substanz		$\frac{\alpha/\nu^2 \cdot 10^{17}}{(\text{für } \nu^2 \ll \nu_m^2)}$ $\text{cm}^{-1} \text{sec}^2$	ν_m MHz	$\mu_m \cdot 10^3$
Wasser	H ₂ O	31 ± 3	> 260	> 6
Schwefelkohlenstoff	CS ₂	21500 ± 2000	> 54	> 70
Chloroform	CHCl ₃	940 ± 40	> 40	> 20
Benzol	C ₆ H ₆	1660 ± 70	> 55	> 61
Toluol	C ₆ H ₅ CH ₃	150 ± 6	> 55	> 5
Xylol	C ₆ H ₄ (CH ₃) ₂	123 ± 7	> 47	> 4
Essigsäure	CH ₃ COOH		< 4,8	> 36
Aceton	CH ₃ COCH ₃	39 ± 10	> 140	> 3,4
Methylazetat	CH ₃ COOCH ₃	1200 ± 100	3,1	2,2
Äthylazetat	CH ₃ COOC ₂ H ₅	530 ± 20	3,4	1,1
Kohlensäure (Gas)	CO ₂		0,1	220
Sauerstoff (Gas)	O ₂		10 ⁻³	11

Tab. 1 enthält ferner für die drei letztgenannten Substanzen Angaben über ν_m und μ_m . Für CH₃COOH können die beiden Konstanten mittels (13) ermittelt werden; freilich mit nur geringer Genauigkeit. Für CH₃COOCH₃ und CH₃COOC₂H₅ ist ν_m aus der Lage des Wendepunkts entnommen, und μ_m aus dem Wert berechnet, dem α/ν^2 bei kleinen Frequenzen zuzustreben scheint.

Die beiden letzten Zeilen der Tab. 1 enthalten die entsprechenden Größen für die Gase CO₂ und O₂, die teils aus Dispersions- teils aus Absorptionsversuchen ermittelt wurden.

Für die in Abb. 1 angeführten Substanzen und Frequenzen kann nunmehr etwas über die zu erwartende Schalldispersion ausgesagt werden. Wo α/ν^2 frequenzunabhängig gefunden wird ($\nu \ll \nu_m$) gilt ja [vgl. (15')]:

$$\frac{V - V_0}{V_0} \approx A \cdot \nu^2; \quad A = \frac{V}{4\pi} \frac{\alpha}{\nu^3} \frac{1}{\nu_m},$$

wobei mit den Daten von Tab. 1 ein oberer Grenzwert für A angegeben werden kann. Für Methyl- und Äthylazetat ist Formel (12) anwendbar, die mittels (10) so geschrieben werden kann:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{V_0 V_\infty} = \frac{1}{\pi} \mu_m \frac{\left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^3}{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^3}.$$

*) Diesem Verfahren liegt die etwas willkürliche Annahme zugrunde, daß sich α/ν^2 aus dem klassischen und dem molekularen Anteil additiv zusammensetzt.

Da man hier mit hinreichender Genauigkeit $V_0 \approx V_\infty$ und daher $v_\infty \approx v_m$ setzen darf [vgl. (11) und die Daten der Tab. 1], so wird

$$\frac{V - V_0}{V_0} \approx \frac{A v^2}{1 + \left(\frac{v}{v_m}\right)^2}; \quad A = \frac{\mu_m}{2\pi v_m^2}.$$

So ergeben sich die folgenden Dispersionsdaten:

Tabelle 2

Substanz	$A \cdot 10^6$ MHz ⁻²	v_1 MHz	v_2 MHz	$\frac{V_2 - V_1}{V_0} \cdot 10^4$	
				ber.	beob.
Wasser	< 0,014	2,4	10,8	< 0,015	< 1 *)
Schwefelkohlenstoff . .	< 38				
Chloroform	< 1,9				
Benzol	< 3,2	3,43	14,5	< 6,4	47 **)
Toluol	< 0,36	3,43	14,5	< 0,7	< 10 **)
		3,6	9,6	< 0,28	< 1 *)
Xylol	< 0,29	3,43	14,5	< 0,6	< 10 **)
Aceton	< 0,027				
Methylazetat	36	3,0	6,0	1,1	< 4 *)
	($v_m = 3,1$ MHz)				
Äthylazetat	15				
	($v_m = 3,4$ MHz)				

In den letzten 4 Spalten ist ein Vergleich mit den wenigen mit hinreichender Genauigkeit gemessenen Schallgeschwindigkeitswerten durchgeführt. Bis auf Benzol, wo eine ungewöhnlich starke Dispersion gefunden wurde, sind die berechneten mit den beobachteten Daten vereinbar.

Unter den Substanzen, bei denen die Messungen konstantes α/v^2 ergeben, befinden sich Wasser und Toluol. Daß α/v^2 bei höheren Frequenzen abnimmt, wie es unsere Deutung verlangt, dafür läßt sich ein weiteres Argument geltend machen¹⁵⁾: Die Aufspaltung der Rayleighschen Streustrahlung in zwei scharfe Komponenten⁶⁾. Diese kommt ja nach Brillouin zustande durch Reflexion des Lichtes an den Debyeschen Wärmewellen, also an Schallwellen von etwa der Frequenz 10^{10} Hz. Bei Reflexion an genügend vielen Ebenen gleicher Phase wird eine endliche Intensität nur unter Erfüllung

*) Die Kenntnis dieser Daten verdankt der Verf. dem Entgegenkommen des Herrn E. Hiedemann. Es handelt sich um noch nicht veröffentlichte Ergebnisse von E. Schreuer, über die in einigen Monaten ausführlich berichtet werden wird.

**) S. Parthasaraty, Current Science 6. S. 55—56. 1937; zitiert nach Phys. Ber. 19. S. 600. 1938.

der Bragg'schen Bedingung gestreut, d. h. für eine bestimmte Beobachtungsrichtung trägt nur ein bestimmter, eng begrenzter Frequenzbereich der Wärmewellen zur Reflexion bei. Das reflektierende Gitter ist also mit einer wohl definierten Frequenz moduliert, woraus sich die Aufspaltung in zwei scharfe Spektrallinien erklärt. Ist aber μ , der Absorptionskoeffizient pro Wellenlänge, für diese Schallwellen von der Größenordnung 1 oder noch größer, so können nur ganz wenige Ebenen gleicher Phase merklich zur Reflexion beitragen, und im Streulicht würde man allenfalls eine verbreiterte Linie finden. Die Aufspaltung in scharfe Linien, die z. B. im Wasser und Toluol gefunden wird, spricht also für $\mu \ll 1$ bei $\nu \sim 10^{10}$ Hz. Daraus ergibt sich, da die Schallgeschwindigkeit für beide Flüssigkeiten ziemlich gleich groß ist, $\frac{\alpha}{\nu^2} \ll 10^{-15} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^2$, ein Wert, der offenbar unterhalb des in Wasser und Toluol bei Ultraschallfrequenzen beobachteten liegt.

III. Bemerkungen zur Struktur der Flüssigkeiten

Abgesehen von den Absorptionsmessungen bei CCl_4 , die noch der Klärung bedürfen, und denen bei Methyl- und Äthylazetat, die nur qualitativ mit unseren Erwartungen übereinstimmen, erscheint also die Darstellung durch Formel (10) bzw. (11') möglich bei geeigneter Wahl der konstanten μ_m und ν_m . Über ihre physikalische Bedeutung können wir in Analogie zu den Verhältnissen bei Gasen folgendes aussagen: μ_m ist im wesentlichen bestimmt durch den Anteil der spezifischen Wärme, um welchen diese bei sehr raschen adiabatischen Zustandsänderungen verkleinert erscheint, mit anderen Worten durch den Anteil der inneren Energie (z. B. Kernschwingungs- oder Dissoziationsenergie), der bei einer plötzlichen Temperaturerhöhung verzögert anwächst und sich mit einer gewissen „Einstelldauer“ dem neuen thermischen Gleichgewicht anpaßt. Bei nichtdissoziierenden Gasen ist in den bisher untersuchten Fällen μ_m durch die Kernschwingungsenergie bestimmt und aus der bekannten Schwingungswärme leicht zu errechnen. Bei Flüssigkeiten kann eine ähnliche Rechnung nicht durchgeführt, daher auch keine Entscheidung gefällt werden, welchem Energieanteil die endliche Einstelldauer zukommt. Immerhin erscheint die Größenordnung der in Tab. 1 angegebenen Grenzwerte im Vergleich mit den μ_m -Werten für CO_2 - und O_2 -Gas nicht unvernünftig.

ν_m muß in Flüssigkeiten ebenso wie in Gasen etwa gleich der reziproken Einstelldauer, mit anderen Worten etwa gleich der Einstellungsgeschwindigkeit sein. Da diese im wesentlichen durch die Stoß-

zahl bestimmt sein wird, sollte ν_m sich in Flüssigkeiten etwa 10^3 mal größer ergeben als in Gasen, was auch größenordnungsmäßig zutrifft (vgl. Tab. 1).

Diese Deutung von μ_m und ν_m macht die Abhängigkeit der Schallabsorption von der Temperatur und bei Mischungen von der Konzentration verständlich. Mit steigender Temperatur nimmt die Schallabsorption in Xylol, Toluol und Benzol zu^{2, 16)}, in Wasser und Aceton ab^{2, 16)}. Bei allen diesen Flüssigkeiten wurde im Bereich $\nu^2 \ll \nu_m^2$ gemessen, wo bei konstant gehaltener Frequenz die Absorption proportional dem Quotienten μ_m/ν_m ist [vgl. (14')]. μ_m nimmt, sofern die verzögerte Einstellung des thermischen Gleichgewichts die Rotations-, Kernschwingungs- oder Dissoziationsenergie betrifft, zweifellos zu oder ist temperaturunabhängig. ν_m hat den Charakter einer Reaktionsgeschwindigkeit, wächst also wahrscheinlich ebenfalls mit der Temperatur. Je nach dem μ_m oder ν_m stärker mit der Temperatur zunimmt, wird man also den Temperaturkoeffizienten der Schallabsorption positiv oder negativ finden*).

Ähnlich ist die Beeinflussung der Schallabsorption durch Beimischungen in Analogie zum Verhalten der Gase zu verstehen. Der einzige mit Zahlenmaterial belegte Fall ist der von CS_2 - CCl_4 -Mischungen⁷⁾. Bei konstanter CCl_4 -Konzentration zeigt sich α/ν^2 unabhängig von ν (zwischen 0,3 und 2 MHz), woraus wir wiederum schließen, daß bei allen Konzentrationen $\nu \ll \nu_m$ und somit

$$\frac{\alpha}{\nu^2} = 2 \frac{\mu_m}{\nu_m} \frac{1}{V}$$

ist. 13,6 Volum-Prozente, das ist 10 Molekül-Prozente CCl_4 setzen den α/ν^2 -Wert bereits auf fast $1/10$ des Wertes für reines CS_2 herab. Da μ_m sehr wahrscheinlich nach der Mischungsregel von der Konzentration abhängt, bedeutet das ein starkes Anwachsen von ν_m infolge von geringen CCl_4 -Beimischungen**). Die gleiche Erscheinung tritt bei Gasen auf: Geringe Mengen von Fremdgasen können die Einstellungsgeschwindigkeit der Schwingungswärme und somit ν_m sehr stark steigern, also, wenn $\nu \ll \nu_m$ ist, α/ν^2 erniedrigen. Dieser Befund ist bekanntlich so zu deuten, daß die Schwingungsenergie eines Moleküls beim Zusammenstoß mit einem Fremdmolekül viel leichter in Translations- oder Rotationsenergie verwandelt wird als beim

*) Nach der klassischen Theorie nimmt α/ν^2 stets mit steigender Temperatur ab.

**) Wie empfindlich die Schallabsorption auf kleine Verunreinigungen reagiert, beweist eine Bemerkung von Bazulin³⁾, der bei „reinem“ Benzol verschiedener Herkunft um 20% differierende Absorptionswerte gemessen hat.

Zusammenstoß mit einem artgleichen, weil dieses auf die gleiche Kernfrequenz abgestimmt und deswegen imstande ist, die Schwingungsenergie als solche zu übernehmen. Ein analoger Vorgang spielt sich demnach anscheinend in Flüssigkeiten ab.

Weniger eindeutig, aber ebenfalls durchaus möglich, ist die Deutung einer Bemerkung von Lucas¹⁴⁾, der die Schallabsorption in Mischungen von Nitrobenzol und Hexan etwa 10 mal größer findet als in jedem der Konstituenten. Nimmt man mangels genauerer Daten an, daß die Konstituenten gleiches μ_m und V besitzen, so ist der Befund entweder dadurch zu erklären, daß bei einer Frequenz $\nu \ll \nu_m$ gemessen wurde und ν_m mit der Mischungskonzentration abnimmt, was unwahrscheinlich ist, oder dadurch, daß $\nu > \nu_m$ und ν_m wie bei allen in dieser Richtung untersuchten Substanzen mit der Konzentration zunimmt, ja sogar in Mischungen größere Werte erreicht als in jedem der Konstituenten, was nach dem oben gesagten durchaus denkbar ist.

Auch in wäßrigen elektrolytischen Lösungen soll α/ν^3 größer sein als in reinem Wasser⁹⁾ in einem Frequenzbereich, wo α/ν^2 frequenzunabhängig, also gleich $2 \frac{\mu_m}{\nu_m} \frac{1}{V}$ ist. Da eine wesentliche Veränderung von μ_m oder V durch das gelöste Salz kaum anzunehmen ist, müßte man folgern, daß ν_m herabgesetzt ist, daß also die Einstellung des thermischen Gleichgewichts in elektrolytischen Lösungen langsamer vonstatten geht als im Lösungsmittel.

Zusammenfassung

Ausgehend von sehr allgemeinen Ansätzen werden Absorptions- und Dispersionsformeln für die Schallausbreitung in Flüssigkeiten abgeleitet. Die Formeln sind vom gleichen Bau wie die für Gase geltenden und beschreiben mittels zweier wählbarer Konstanten die Frequenzabhängigkeit der Schallabsorption und -geschwindigkeit. Die experimentellen Absorptionswerte für 12 Flüssigkeiten lassen sich mit geringfügigen Ausnahmen durch diese Formeln befriedigend darstellen. Sie erklären auch, warum bisher Schalldispersion in den meisten Flüssigkeiten nicht gefunden werden konnte. Eine zwanglose Deutung ergibt sich ferner für die Abhängigkeit der Schallabsorption von der Temperatur und bei Mischungen von der Konzentration.

Literaturverzeichnis

- 1) R. Bär, *Helv. Phys. Acta* **10**. S. 332. 1937.
- 2) E. Baumgardt, *Compt. rend.* **202**. S. 203. 1936.
- 3) P. Bazulin, *Compt. rend. USSR.* **14**. S. 273. 1937.
- 4) P. Biquard, *Thèse de Doctorat*, Paris 1935.
- 5) P. Biquard, *Compt. rend.* **202**. S. 117. 1936.
- 6) K. Birus, *Phys. Ztschr.* **39**. S. 80. 1938.
- 7) J. Claeys, J. Errera u. H. Sack, *Compt. rend.* **202**. S. 1493. 1936.
- 8) J. Claeys, J. Errera u. H. Sack, *Trans. Far. Soc.* **33**. S. 136. 1937.
- 9) E. Grossmann, *Hdb. d. Exp. Phys.* Bd. 17. 1. Teil. S. 500ff.
- 10) H. O. Kneser, *Ann. d. Phys.* [5] **11**. S. 761. 1931.
- 11) H. O. Kneser, *Ann. d. Phys.* [5] **16**. S. 337. 1933.
- 12) H. O. Kneser, *Ztschr. f. techn. Phys.* **16**. S. 213. 1935.
- 13) R. Lucas, *Compt. rend.* **201**. S. 1171. 1935.
- 14) R. Lucas, *Journ. de Phys. et le Rad.* **8**. S. 41. 1937.
- 15) L. Mandelstam u. M. Leontowitsch, *Compt. rend. USSR.* **3**. (12). S. 111. 1936.
- 16) C. Sörensen, *Ann. d. Phys.* [5] **27**. S. 70. 1936.

Marburg/L., Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 12. März 1938)

Über das Drehmoment kubischer Einkristalle im Magnetfeld

Von H. Mussmann und H. Schlechtweg

(Mit 6 Abbildungen)

Für das Studium des Problems der magnetischen Anisotropie ist die Messung des Drehmomentes von Interesse, das eine im Magnetfeld mit ihrer Achse senkrecht zu den Feldlinien aufgehängte Kreisscheibe erfährt. In starken Feldern sind bekanntlich die eintretenden Vorgänge durch Drehprozesse des Vektors der spontanen Magnetisierung bestimmt. Seither wurden hierbei in der Hauptsache nur Fälle betrachtet, in denen die Scheibennormale einer Würfelkante, Flächendiagonalen oder Raumdiagonalen des Kristallgitters entspricht¹⁾. In der genannten Arbeit von H. Schlechtweg¹⁾ wurde auch das Problem beliebiger kristallographischer Orientierung betrachtet; es wurde hierbei der Grenzwert berechnet, dem das Drehmoment bei ins Unendliche wachsendem Feld zustrebt sowie die Art der Annäherung. Die folgenden Bemerkungen sollen sich auf eine einfachere Darstellung des bei beliebiger Orientierung zu beobachtenden Drehmoments beziehen. Infolgedessen ergibt sich eine handliche Methode zur Bestimmung der kristallographischen Orientierung einer kreisförmigen Einkristallscheibe auf magnetischem Wege.

Während die hier mitgeteilte Rechnung auch die Möglichkeit enthält, die Art der Annäherung an dem zu unendlich großem Feld gehörenden Grenzwert zu berechnen, erschien während der Ausarbeitung unserer magnetischen Orientierungsbestimmung eine Arbeit von L. P. Tarasov und F. Bitter²⁾, die sich nur auf die Größe des Grenzwertes selbst bezieht und ebenfalls eine Orientierungsbestimmung anstrebt. Die von uns ausgearbeitete andere Methode sei im folgenden mitgeteilt.

1. Das Drehmoment des Einkristalls

Die innere freie Energie eines gesättigten kubischen Einkristalls werde in der folgenden Form zugrunde gelegt:

$$(1,1) \quad U_1 = K(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2),$$

1) Literatur bei H. Schlechtweg, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 573. 1936.

2) L. P. Tarasov u. F. Bitter, Phys. Rev. 52. S. 353. 1937.

wo die α_i die Richtungskosinus der spontanen Magnetisierung mit den drei Kristallachsen bedeuten. Wie bekannt, lassen sich hiermit die Verhältnisse darstellen mit Ausnahme einer gewissen Umgebung der Raumdiagonalen des Kristallgitters¹⁾. Die Lage des Vektors J der spontanen Magnetisierung wird dann durch das folgende Minimumproblem charakterisiert:

$$(1,2) \quad U \equiv U_1 - (\mathfrak{H} J) = \text{Minimum},$$

wo $(\mathfrak{H} J)$ das skalare Produkt des Feldes \mathfrak{H} mit der spontanen Magnetisierung J bedeutet.

Es seien n_1, n_2, n_3 die Richtungskosinus der Blechnormalen gegen die Achsen des Kristallgitters; es sei φ_n der Winkel zwischen der Blechnormalen und einer der Achsen, die im folgenden als Achse 3 eines Polarkoordinatensystems ausgezeichnet werde; weiterhin sei φ_n der Winkel zwischen der Achse 1 und der Projektion der Blechnormalen von der Achse 3 aus in die Ebene der Achsen 1 und 2; im übrigen sei die Numerierung der Achsen so durchgeführt, daß die Achse 2 den Winkel $\varphi_n = +\frac{\pi}{2}$ mit der Achse 1 bildet. Dann gilt nach Abb. 1

$$(1,3) \quad \begin{cases} n_1 = \sin \varphi_n \cdot \cos \varphi_n, \\ n_2 = \sin \varphi_n \cdot \sin \varphi_n, \\ n_3 = \cos \varphi_n. \end{cases}$$

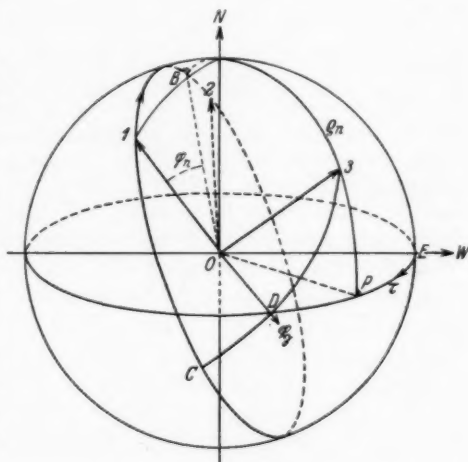


Abb. 1. Einheitskugel mit Blechebene als Äquatorebene.

ON Normalrichtung, OW Walzrichtung,
1, 2, 3: Würfelkanten des Kristallgitters,
 $\varphi' = \angle 1B2C$, $\tau = \angle EP$, $\sigma = \angle PD$

Die Lage des magnetischen Feldes \mathfrak{H} , das bei genügend dünner Scheibe zufolge der geringen Größe des Entmagnetisierungsfaktors mit dem Außenfeld identisch ist, werde in dem System der Kristallachsen beschrieben durch die Winkel φ' und φ'' , wobei zu beachten

1) R. Gans u. E. Czerlinski, Schrift. d. Königsberger Gel. Ges. 9. S. 1. 1932.

ist, daß φ' bei der in Abb. 1 vorausgesetzten Lage von \S ein überstumpfer Winkel ist. Ein zweites, sich auf die geometrische Gestalt der Kreisscheibe beziehendes Koordinatensystem wird durch die Blechnormale gegeben, durch eine Bezugsrichtung in der Blechebene, etwa die Walzrichtung, und die Querrichtung; dieses zweite Koordinatensystem sei so gewählt, daß sein Sinn mit dem Sinn des Systems 1, 2, 3 übereinstimmt; in dem mit der Blechebene verbundenen System werde die Lage von \S beschrieben durch einen Winkel σ , der von der Projektion der Kristallachse 3 in die Blechebene aus in positivem Sinn gezählt wird; der Winkel zwischen der Walzrichtung und der Projektion der Achse 3 in die Blechebene werde mit τ bezeichnet. Es gilt dann gemäß Abb. 1:

$$(1,4) \quad \cos \varphi' = \cos \sigma \cdot \sin \varrho_n.$$

Da die Feldstärke senkrecht zur Blechnormalen steht, so folgt, etwa aus dem Verschwinden des skalaren Produktes beider Vektoren

$$(1,5) \quad \cos(\varphi' - \varphi_n) = -\operatorname{ctg} \varphi' \operatorname{ctg} \varrho_n.$$

Es ist nunmehr das Minimalproblem (1,2) zu lösen. Da nur das Gebiet hoher Felder interessiert, wo die spontane Magnetisierung bereits sehr nahe an die Feldrichtung gedreht ist, so können zwecks Vereinfachung der Rechnung die von der Größe des Feldes abhängigen Winkel ϱ und φ in der Umgebung der durch $\varrho = \varrho'$, $\varphi = \varphi'$ gekennzeichneten Stelle nach negativen Potenzen des Betrages der Feldstärke entwickelt werden. Das auf die im Magnetfeld aufgehängte Scheibe pro Volumeneinheit ausgeübte Drehmoment D/V wird dann gegeben durch das skalare Produkt zwischen Blechnormale und dem vektoriellen Produkt der Vektoren \S und J . Die Rechnung führt mit den Abkürzungen

$$(1,6) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1' &= -\frac{1}{2} \sin 4\varphi' - \frac{1}{2} \sin^2 \varrho' \cdot \sin 2\varphi' \cdot \sin^2 2\varphi', \\ B_1' &= -\frac{1}{2} \sin^2 \varrho' \cdot \sin 4\varphi', \\ A_2' &= -A_1 (2 \cdot \cos 4\varphi' + \sin^2 \varrho' (4 \cos^2 \varrho' - 1) \sin^2 2\varphi') \\ &\quad + \frac{7}{16} \sin^4 \varrho' \cdot \sin 2\varphi' \cdot \sin^2 4\varphi', \\ B_2' &= \frac{3}{8} \sin 2\varphi' \cdot \sin 4\varphi' \cdot \sin 4\varphi' \\ &\quad + \frac{3}{8} \sin^2 \varrho' \cdot \sin^2 2\varphi' \cdot \sin^2 2\varphi' \cdot \sin 4\varphi' \\ &\quad + \sin^4 \varrho' \cdot \sin 4\varphi' \cdot \cos 4\varphi' \end{aligned} \right.$$

auf folgenden Wert des Drehmoments:

$$(1,7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{D}{VK} \equiv \delta &= -A_1' \cdot \sin \varrho_n \cdot \sin(\varphi_n - \varphi') - B_1' \cdot \cos \varrho_n \\ &- \frac{1}{h} \left\{ \left(A_2' - \frac{1}{4} B_1'^2 \cdot \sin 2\varrho' \right) \cdot \sin \varrho_n \cdot \sin(\varphi_n - \varphi') \right. \\ &\left. + (A_1' \cdot B_2' \cdot \cos \varrho' + B_2' \cdot \sin \varrho') \frac{\cos \varrho_n}{\sin \varrho'} \right\} . \end{aligned} \right.$$

Für unendlich großes Magnetfeld strebt also das Drehmoment gegen den folgenden Grenzwert¹⁾

$$(1,8) \quad \delta_\infty = A_1' \cdot \sin \varrho_n \cdot \sin(\varphi' - \varphi_n) - B_1' \cdot \cos \varrho_n .$$

Die weiteren Überlegungen sollen sich nun nur beziehen auf diesen Grenzwert des Drehmoments. Die letztere Formel beschreibt ihn außer in Abhängigkeit von der kristallographischen Orientierung der Scheibennormalen als Funktion der Lage des Feldvektors im Gitter; mit Hilfe der Formeln (1,4) und (1,5) ist somit implizit ein Zusammenhang gegeben zwischen dem Drehmoment und dem in der Scheibenebene gezählten Drehwinkel σ der Scheibe. Im folgenden soll nun zunächst eine formelmäßige Darstellung abgeleitet werden, die die Abhängigkeit des Drehmoments vom Drehwinkel unmittelbar abzulesen gestattet; es sind also ϱ' und φ' aus (1,8) bzw. (1,6) zu eliminieren mit Hilfe des Winkels σ nach (1,4) bzw. (1,5).

So erhält man aus (1,5)

$$(1,9) \quad \sin(\varphi' - \varphi_n) = - \frac{\sin \sigma}{\sin \varrho'} .$$

Im Verein mit den Gl. (1,4) und (1,5) lassen sich hieraus $\sin \varphi'$ und $\cos \varphi'$ selbst berechnen. Die hier etwas mühselige Rechnung, bei der man zweckmäßig die \sin bzw. \cos der Vielfachen von φ_n bzw. σ einführt, liefert für den gesuchten Zusammenhang zwischen Drehmoment und dem Drehwinkel σ die folgende Beziehung:

$$(1,10) \quad D(\sigma) \equiv \delta \cdot VK = a_1 \cos 2\sigma + a_2 \cos 4\sigma + b_1 \sin 2\sigma + b_2 \sin 4\sigma ,$$

wobei die Zahlen a_1, b_1, a_2, b_2 gegeben sind durch

$$(1,11) \quad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= - \frac{VK}{4} \sin^2 \varrho_n \cdot \cos \varrho_n \sin 4\varphi_n , \\ a_2 &= + \frac{VK}{4} (2 - \sin^2 \varrho_n) \cos \varrho_n \sin 4\varphi_n , \\ b_1 &= + \frac{VK}{4} \sin^2 \varrho_n \left\{ \frac{7}{2} \sin^2 \varrho_n - 3 - \cos 4\varphi_n \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varrho_n \right) \right\} , \\ b_2 &= + \frac{VK}{4} \left\{ \frac{7}{4} \sin^4 \varrho_n + 2 \cdot \cos 4\varphi_n \left(\cos^2 \varrho_n + \frac{1}{8} \sin^4 \varrho_n \right) \right\} . \end{aligned} \right.$$

1) Die Formel (1,8) wurde bei früherer Gelegenheit bereits angegeben (H. Schlechtweg, a. a. O.).

Man erkennt somit, daß das Drehmoment dargestellt werden kann durch ein Fourierpolynom in dem Winkel σ , um den die Feldstärke gegen die Projektion der ausgezeichneten Kristallachse 3 gedreht worden ist; es kommen dabei *nur die zweiten und vierten Harmonischen* vor, in gleicher Weise, wie in der nach Abschluß der vorstehenden Rechnung erschienenen Arbeit von Tarasov und Bitter¹⁾. Aus der obigen Darstellung können leicht die bereits bekannten Grenzfälle abgeleitet werden; es ist in diesem Zusammenhang zu bemerken, daß für die Oktaederebene (man setze z. B. $\cos \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi_n = 45^\circ$) sich hier für jedes σ der Wert Null ergibt im Widerspruch zur Erfahrung²⁾. Wir schließen daher aus den weiteren Betrachtungen Ebenen aus, die in der Nähe der Oktaederebene liegen.

2. Die magnetische Orientierungsbestimmung

Der Betrag des in Formel (1,10) auftretenden Drehwinkels σ ist dadurch festgelegt, daß er von der Projektion derjenigen Kristallachse in die Blechebene gerechnet wird, von der aus der Polariswinkel φ gezählt wird; es ist dies in unserer obigen Numerierung die Achse 3. Da aber die Lage dieser Projektion in der Blechebene zunächst unbekannt ist, so möge sie durch einen Winkel τ beschrieben werden, den sie mit einer willkürlichen Bezugsrichtung, etwa der Walzrichtung, bildet. Es soll von jetzt an auch der die Lage des Feldes in der Blechebene charakterisierende Winkel σ von dieser willkürlichen Bezugsrichtung aus gezählt werden. Für die Abhängigkeit des Drehmomentes von der Lage des Feldes ist demnach jetzt an Stelle der Formel (1,10) zu schreiben:

$$(2.1) \quad \begin{cases} D(\sigma) = a_1 \cos 2(\sigma - \tau) + a_2 \cos 4(\sigma - \tau) \\ \quad \quad \quad + b_1 \sin 2(\sigma - \tau) + b_2 \sin 4(\sigma - \tau). \end{cases}$$

Mißt man demnach versuchsmäßig das Drehmoment für verschiedene Richtungen des Feldes, so muß die harmonische Analyse die Darstellbarkeit in der folgenden Form zeigen:

$$(2.2) \quad D(\sigma) = A_1 \cdot \cos 2\sigma + A_2 \cdot \cos 4\sigma + B_1 \cdot \sin 2\sigma + B_2 \cdot \sin 4\sigma.$$

Hierbei bedeuten:

$$(2.3) \quad \begin{cases} A_1 = a_1 \cos 2\tau - b_1 \sin 2\tau, & B_1 = a_1 \sin 2\tau + b_1 \cos 2\tau, \\ A_2 = a_2 \cos 4\tau - b_2 \sin 4\tau, & B_2 = a_2 \sin 4\tau + b_2 \cos 4\tau. \end{cases}$$

1) L. P. Tarasov u. F. Bitter, a. a. O.

2) R. Gans u. E. Czerlinski, a. a. O.

Die Aufgabe der magnetischen Orientierungsbestimmung besteht nun darin, aus den versuchsmäßig ermittelten Zahlen A_1, A_2, B_1, B_2 die kristallographische Orientierung der Einkristallnormalen zu ermitteln, d. h. die Winkel ϱ_n und φ_n zu bestimmen; weiterhin ist der die Lage des Systems der Kristallachsen relativ zur Bezugsrichtung (Walzrichtung) beschreibende Winkel τ zu bestimmen. Neben diesen rein kristallographischen Daten liefern die 4 Zahlen A_1, A_2, B_1, B_2 auch noch die magnetische Anisotropieenergie K des betreffenden Werkstoffes.

Wir wenden uns zur Bestimmung der kristallographischen Orientierung der Normalen der untersuchten Einkristallscheibe. Man entnimmt aus den Gl. (2,3) sofort die Gültigkeit der folgenden Relation:

$$(2,4) \quad \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{A_1^2 + B_1^2}{A_2^2 + B_2^2} = q.$$

Die Zahl q , die mit Hilfe der A und B sofort aus dem Versuchsergebnis entnommen werden kann, liefert durch ihren Zusammenhang mit den a und b also eine Beziehung zwischen den

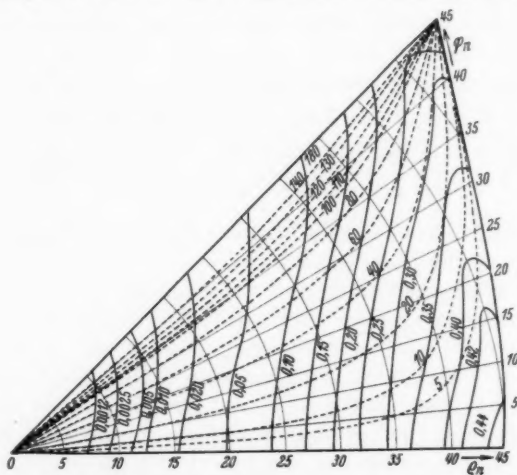


Abb. 2. Bestimmung des Wertepaares (φ_n, q_n) mit Hilfe der Kurven:
 $q = \text{const}$ und $A = \text{const}$
 (durchgezogene Kurven: $q = \text{const}$, gestrichelte Kurven: $A = \text{const}$)

beiden Unbekannten ϱ_n und φ_n . In Abb. 2 sind in einem Koordinatennetz der ϱ_n, φ_n die mit Hilfe der a und b errechneten Kurven $q = \text{const}$ eingetragen; man beachte, daß hierzu nicht die Kenntnis der Anisotropieenergie K notwendig ist. Indem in Abb. 2

die Betrachtung auf dem Bereich $0 < \varrho_n < 55^\circ$, $0 < \varphi_n < 45^\circ$ beschränkt wurde, wird dort die zum Blech steilste Würfelkante des Kristallgitters als Ausgangspunkt der Zählung von ϱ_n ausgezeichnet, was natürlich keine Einschränkung für die Allgemeinheit der vorliegenden Betrachtungen bedeutet.

Nach dieser Benutzung der Zahl q , die das Quadrat von dem Amplitudenverhältnis der zweiten und vierten Harmonischen darstellt, betrachten wir die Phasendifferenz dieser beiden Wellen gegeneinander. Wir denken uns zu diesem Zweck das Drehmoment dargestellt in der folgenden Form:

$$D(\sigma) = m \cdot \sin 2(\sigma - \tau + g) + n \cdot \sin 4(\sigma - \tau + h);$$

hierbei bedeuten g und h die Phasenwinkel jeder der beiden Wellen. Es ist klar, daß die Differenz beider Phasen von der Größe des Winkels unabhängig sein muß und somit neben der oben aus dem Amplitudenverhältnis erhaltenen Relation eine zweite Beziehung zur Bestimmung der beiden Zahlen ϱ_n und φ_n liefert¹⁾. Wegen

$$\operatorname{tg} 2g = \frac{a_1}{b_1}, \quad \operatorname{tg} 4h = \frac{a_2}{b_2},$$

läßt sich sofort die Phasendifferenz $h - g$ ermitteln; in Abb. 2 sind die so errechneten Kurven $\Delta \equiv 4(h - g) = \text{const}$ eingetragen. Schreibt man das gemessene Drehmoment (2,2) in die Form

$$D(\sigma) = M \cdot \sin 2(\sigma + G) + N \cdot \sin 4(\sigma + H),$$

so errechnet man leicht aus

$$(2,5) \quad \operatorname{tg} 2G = \frac{A_1}{B_1}, \quad \operatorname{tg} 4H = \frac{A_2}{B_2},$$

die Phasendifferenz $\Delta \equiv 4(H - G) = 4(h - g)$ der beiden Wellen. Man erhält demnach das gesuchte Wertepaar ϱ_n, φ_n aus Abb. 2 als Schnittpunkt der beiden Kurven $q = \text{const}$ und $\Delta = \text{const}$, deren Werte q bzw. Δ man nach (2,4) bzw. (2,5) ermittelt hat.

Der letzte Schritt der Orientierungsbestimmung, die Berechnung des Winkels τ zwischen Bezugsrichtung (z. B. Walzrichtung) und Projektion derjenigen Würfelkante des Kristallgitters in die Blechebene, von der ϱ_n aus gezählt wird, kann in einfacher Weise mit Hilfe von (2,5) bewerkstelligt werden. Durch Benutzung von (2,3) liefert (2,5) einen Zusammenhang zwischen $\operatorname{tg} 2G$ und $\operatorname{tg} 2\tau$, der sich in folgender Form schreiben läßt:

$$(2,6) \quad \operatorname{tg} 2\tau = \frac{\frac{a_1}{b_1} - \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{A_1}{B_1}},$$

1) Den Gedanken einer Benutzung der Phasenverschiebung verdanken wir einer Unterhaltung mit Herrn F. Stäblein.

und den man sofort als die Phasendifferenz der beiden um τ in der Phase verschobenen zweiten Harmonischen erkennt. Da a_1/b_1 nach vorheriger Ermittlung von φ_n und φ_w bekannt ist und aus Abb. 3 unmittelbar abgelesen werden kann, andererseits aber A_1/B_1 experimentell bekannt ist, so läßt sich nach (2,6) der gesuchte Winkel τ sofort berechnen.

Besteht etwa das Bedürfnis, die kristallographische Orientierung der durch die Winkel φ_w , φ_n gekennzeichneten Bezugsrichtung

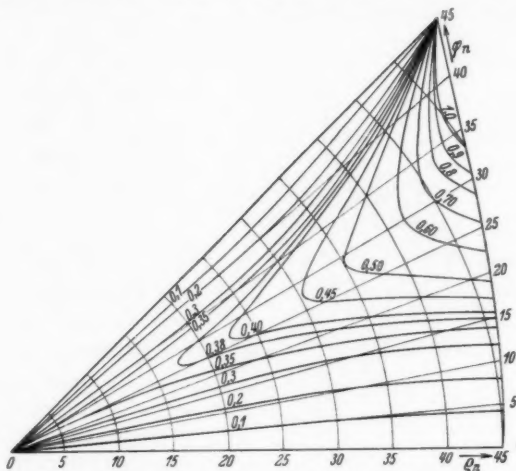


Abb. 3. Kurven $\frac{a_1}{b_1} = \text{const}$ im Koordinatennetz (φ_n , φ_w)

(Walzrichtung) anzugeben, so ist dies möglich unter Benutzung der Formeln:

$$(2,7) \quad \begin{cases} \cos \varphi_w = \cos \tau \cdot \sin \varphi_n \\ \cos (\varphi_w - \varphi_n) = -\text{ctg } \varphi_w \cdot \text{ctg } \varphi_n. \end{cases}$$

So ist z. B. bei der in Abb. 1 angenommenen Lage der kristallographischen Achsen zum Blech der Winkel φ_w ein stumpfer Winkel.

Nach der Orientierungsbestimmung, die statt nach der vorstehend beschriebenen magnetischen Methode natürlich auch röntgenographisch nach einem der bekannten Verfahren erfolgen kann, ist auch die Bestimmung der magnetischen Anisotropieenergie K des untersuchten Werkstoffes leicht möglich, etwa unter Benutzung der aus (2,3) folgenden Beziehung

$$(2,8) \quad A_1^2 + B_1^2 = \frac{V^2 K^2}{16} \cdot \frac{a_1^2 + b_1^2}{(VK)^2} \cdot 16.$$

Bei bekannten Zahlen ϱ_n und φ_n ist die Zahl $16 \frac{a_1^2 + b_1^2}{(VK)^2}$ nach (1,11) vom Volumen V und der Anisotropieenergie K unabhängig; sie ist

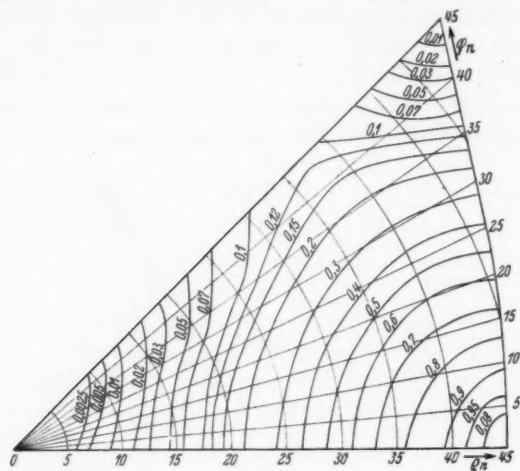


Abb. 4. Kurven $\left(\frac{4}{VK}\right)^2 (a_1^2 + b_1^2) = \text{const}$

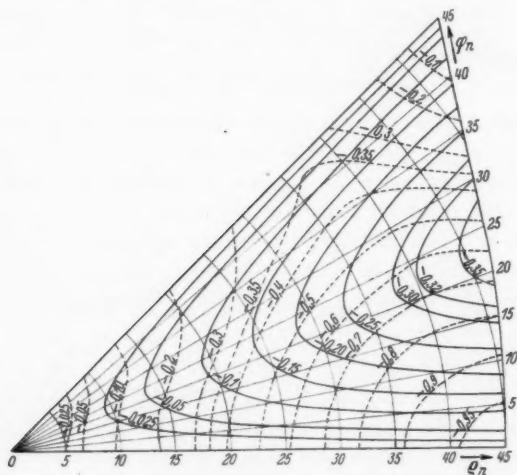


Abb. 5. Kurven $a_1 = \text{const}$ (durchgezogen) und Kurven $b_1 = \text{const}$ (gestrichelt)

in Abb. 4 in Abhängigkeit von ϱ_n und φ_n aufgetragen. Formel (2,8) gestattet demnach unmittelbar die Berechnung von K aus dem

Volumen V , der bekannten Orientierung und den experimentell feststellbaren Zahlen A_1 und B_1 .

Während (2,8) die Zahl K nur bis auf das Vorzeichen festlegt, kann man sie mit dem richtigen Vorzeichen aus A_1 gemäß (2,3) in ähnlicher Weise bestimmen, braucht dann aber die Kenntnis von τ , die bei Benutzung von (2,8) nicht nötig ist; die Zahlen a_1 und b_1 sind aus Abb. 5 zu entnehmen.

Die Auswertungsmethode wurde noch an dem folgenden *Beispiel* durchgeführt. An einer Einkristallscheibe aus Transformatorenblech wurde das Drehmoment

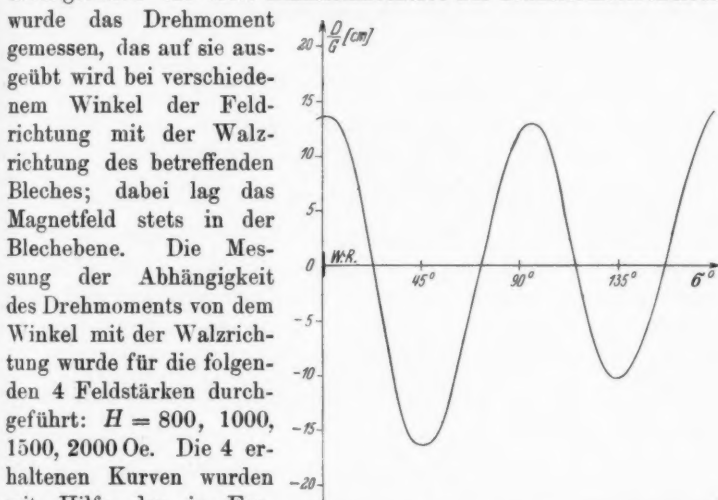


Abb. 6. Drehmoment pro Gramm Einkristallgewicht in Abhängigkeit vom Winkel des Feldes mit der Walzrichtung; extrapoliert auf unendlich große Feldstärke

gemessen, das auf sie ausgeübt wird bei verschiedenem Winkel der Feldrichtung mit der Walzrichtung des betreffenden Bleches; dabei lag das Magnetfeld stets in der Blechebene. Die Messung der Abhängigkeit des Drehmoments von dem Winkel mit der Walzrichtung wurde für die folgenden 4 Feldstärken durchgeführt: $H = 800, 1000, 1500, 2000$ Oe. Die 4 erhaltenen Kurven wurden mit Hilfe des in Formel (1,7) enthaltenen $1/H$ -Gesetzes auf die Feldstärke Unendlich extrapoliert; das Ergebnis ist in Abb. 6 dargestellt; die harmonische Analyse führt auf die folgende Darstellung, in der P das Gewicht der Scheibe und $s = 7,6 \text{ g/cm}^3$ das spezifische Gewicht des Werkstoffes ist:

$$\frac{D(\sigma)}{P} = 1,15 \cos 2\sigma + 13,41 \cos 4\sigma - 2,78 \sin 2\sigma + 1,85 \sin 4\sigma.$$

Dabei ist das Drehmoment in $\text{cm} \cdot \text{g}$ gemessen. Formel (2,4) liefert $q = 0,049$; Formel (2,5) liefert $2G = -22,5^\circ$ und $4H = 82,5^\circ$, also $4 = 4H - 4G = 127,5^\circ$. Aus Abb. 2 entnimmt man dann für die kristallographische Orientierung die folgenden Werte:

$$\varphi_n = 28,1^\circ, \quad \varphi_n = 38,5^\circ$$

Zur Bestimmung des Winkels τ entnimmt man aus Abb. 3 für dieses Wertepaar (ϱ_n , φ_n) den Wert $\frac{a_1}{b_1} = 0,25$, und demgemäß nach Formel (2,6)

$$\tau = 18,8^\circ.$$

Die röntgenographische Orientierungsbestimmung mit der Rückstrahlmethode¹⁾ lieferte die hiermit übereinstimmenden Werte

$$\varrho_n = 27,5^\circ, \quad \varphi_n = 40^\circ, \quad \tau = 17^\circ.$$

Mit Hilfe von ϱ_n und φ_n läßt sich sofort die Anisotropieenergie bestimmen; es ist in dem Falle des vorliegenden Beispiels nach Abb. 4:

$$\left(\frac{4}{V K}\right)^2 (a_1^2 + b_1^2) = 0,108.$$

Mit $P = 1,164 g$ ergibt sich aus Formel (2,8)

$$K = 2,39 \cdot 981 = 2,34 \cdot 10^5 \text{ erg/cm}^3.$$

Zwecks Festlegung der kristallographischen Orientierung der Walzrichtung verfährt man nach (2,7) und erhält

$$\varrho_w = 63,5^\circ, \quad \varphi_w - \varphi_n = 180 - 20,7^\circ = 159^\circ, \quad \varphi_w = 198^\circ.$$

Für die Kosinus der Winkel mit den 3 Kristallachsen erhält man:

$$\text{Für die Normale } n_1 = 0,37; \quad n_2 = 0,29; \quad n_3 = 0,88;$$

$$\text{Für die Walzrichtung } w_1 = -0,85; \quad w_2 = -0,28; \quad w_3 = 0,45.$$

Die Normale ist also etwa eine [113]-Richtung und die Walzrichtung eine $[\bar{3}\bar{1}2]$ -Richtung.

1) Vgl. hierzu F. Stäblein u. H. Schlechtweg, *Erg. d. techn. Röntgenkunde*, Jahrgang 1937.

Essen, Physikalische Versuchsanstalt der Friedr. Krupp-A.-G., Anfang März 1938.

(Eingegangen 17. März 1938)

**Über die Verlagerung der Eigenfrequenzen
und Dämpfungen in gekoppelten Schwingungssystemen**

Von Karl Willy Wagner

In einer kürzlich erschienenen Arbeit von G. Schmerwitz über „Das abweichende Verhalten der Dämpfungskopplung von den bekannten Kopplungserscheinungen“¹⁾ zeigt der Verf. an einigen Beispielen, „daß sich die Dämpfungskopplung zu den Erscheinungen der Kraft- und Beschleunigungskopplung entgegengesetzt verhält“. Er hält dieses Ergebnis für neu und will mit der Veröffentlichung desselben die bezüglich der Dämpfungskopplung „noch bestehende Lücke in der Kopplungstheorie durch eine möglichst allgemein gehaltene Behandlung der Rechnungen und durch geeignet ausgewählte Meßbeispiele“ ausfüllen. Dem Verf. ist meine Arbeit über „Die Eigenschwingungen und Dämpfungen von gekoppelten Schwingungsgliedern“ offensichtlich entgangen, die im Heft 8 der Zeitschrift „Telegraphen- und Fernsprechtechnik“ 1935 veröffentlicht ist. In dieser Arbeit ist der Einfluß der verschiedenen Arten der Kopplung auf die Lage der Eigenfrequenzen und Dämpfungen ausführlich behandelt. Da offenbar in weiteren Kreisen Unklarheit über die Wirkung der verschiedenen Kopplungsarten besteht, sei mir gestattet, eine Reihe von Schlußfolgerungen aus dieser Arbeit hier anzugeben, zumal dieselben in mehrfacher Hinsicht über die Ergebnisse des Herrn Schmerwitz hinausgehen, der sich auf den Sonderfall der reinen Dämpfungskopplung beschränkt und aus der numerischen Berechnung von Beispielen nur zu qualitativen Regeln über die Verlagerung der Frequenzen und Dämpfungen gelangt.

Die mathematische Begründung der nachstehend angegebenen Beziehungen ergibt sich aus den Berechnungen in meiner früheren Arbeit.

Zur Festlegung der Begriffe und Bezeichnungen stelle ich die Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen des gekoppelten Systems in der von mir verwendeten Form an den Anfang:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 = 0. \end{cases}$$

1) G. Schmerwitz, Ann. d. Phys. [5] 30. S. 209. 1937.

Darin sind die a_{11} , a_{22} und a_{12} die Differentialoperatoren

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11} = k_{11} + r_{11} \frac{d}{dt} + m_{11} \frac{d^2}{dt^2}, \\ a_{22} = k_{22} + r_{22} \frac{d}{dt} + m_{22} \frac{d^2}{dt^2}, \\ a_{12} = k_{12} + r_{12} \frac{d}{dt} + m_{12} \frac{d^2}{dt^2}. \end{cases}$$

Die Größe a_{11} bezieht sich auf das eine Schwingungsglied, a_{22} auf das zweite Schwingungsglied, während a_{12} die Kopplung bestimmt.

In diesen Größen bedeuten die k die Federsteifen, die r die Reibungen, die m sind die Massen.

Ersetzt man in (2) d/dt durch

$$(3) \quad p = -\varrho \pm i\Omega,$$

wo also ϱ die Dämpfung und Ω die Kreisfrequenz der Eigenschwingung bedeutet, so ergibt sich aus (1) die Stammgleichung

$$(4) \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

zur Berechnung von p als Gleichung vierten Grades.

Wie auch Herr Schmerwitz bemerkt, ist die Lösung dieser Gleichung für beliebige Werte der Konstanten k , r , m sehr unübersichtlich. Es bietet zwar keine Schwierigkeit, die Lösungen für jeden numerisch gegebenen Fall zu berechnen; dagegen ist es nicht möglich, allgemeine Regeln bezüglich des Verhaltens der Lösungen aufzustellen.

In der Tat sind einfache Zusammenhänge zwischen den Eigenschwingungen des gekoppelten Systems und denen der Teilglieder im allgemeinen nur im Falle *mäßiger Kopplung* überhaupt zu erwarten; bei starker Kopplung wird durch die Kopplungsglieder selbst das Schwingungsgebilde so tiefgreifend beeinflußt, daß seine Eigenschaften keine deutliche Beziehung zu den Eigenschaften der ungekoppelten Teile mehr haben. Aus diesem Grunde habe ich meiner Untersuchung den Fall der schwachen oder losen Kopplung zugrunde gelegt. Für diesen Fall lassen sich alle hier auftauchenden Fragen durch einfache Näherungsrechnungen mit praktisch vollkommen ausreichender Genauigkeit beantworten. Man erhält auf diese Weise übersichtliche Regeln über die Verlagerung der Eigenfrequenzen und Dämpfungen durch die Kopplung. Nachstehend führe ich die Ergebnisse für die praktisch hauptsächlich interessierenden Sonderfälle an.

1. Beide Teillieder genau gleich

Hier ist

$$(5a) \quad \begin{cases} k_{11} = k_{22} = k, \\ r_{11} = r_{22} = r, \\ m_{11} = m_{22} = m. \end{cases}$$

also auch

$$a_{11} = a_{22} = a = k + r p + m p^2.$$

In diesem, seit langem bekannten Falle spaltet sich die Stammgleichung in zwei quadratische Gleichungen. Die Lösung kann daher auch für beliebig starke Kopplung allgemein angeschrieben werden. Man erhält für die beiden Eigenschwingungen die Kreisfrequenzen

$$(5b) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \sqrt{\frac{k - k_{12}}{m - m_{12}} - \varrho_1^2}, \\ \Omega_2 = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m + m_{12}} - \varrho_2^2}, \end{cases}$$

und die Dämpfungen

$$(5c) \quad \begin{cases} \varrho_1 = \frac{r - r_{12}}{2(m - m_{12})}, \\ \varrho_2 = \frac{r + r_{12}}{2(m + m_{12})}. \end{cases}$$

Diese einfachen Beziehungen lassen ohne weiteres erkennen, wie die verschiedenen Kopplungsarten die Frequenzen und Dämpfungen beeinflussen. Man übersieht auch sofort, daß in dem besonderen Falle

$$(6a) \quad \frac{k_{12}}{k} = \frac{m_{12}}{m} = \frac{r_{12}}{r}$$

die beiden Eigenschwingungen mit der Eigenschwingung jedes Teilliedes identisch werden:

$$(6b) \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} - \varrho^2} = \Omega.$$

$$(6c) \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \frac{r}{2m} = \varrho.$$

Das System ist entartet.

2. Beide Teillieder aufeinander abgestimmt,
aber sonst beliebig zusammengesetzt

Dieser praktisch wichtige und interessante Fall ist durch die Voraussetzung

$$(7a) \quad \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{k_{22}}{m_{22}} = \omega_0^2$$

gezeichnet. ω_0 ist die Kreisfrequenz der Eigenschwingung der ungedämpften Einzelglieder. Die Dämpfungen ϱ_{10} und ϱ_{20} der Teilglieder werden als klein angenommen, so daß

$$(7b) \quad \begin{cases} \varrho_{10} = \frac{r_{11}}{2m_{11}} \ll \omega_0, \\ \varrho_{20} = \frac{r_{22}}{2m_{22}} \ll \omega_0 \end{cases}$$

ist. Es zeigt sich, daß es hier wesentlich auf den Betrag des Dämpfungsunterschiedes

$$(7c) \quad d = \varrho_{20} - \varrho_{10}$$

ankommt.

Bei der vorausgesetzten losen Kopplung liegen die Eigenwerte p der beiden Eigenschwingungen [vgl. Gl. (3)] nahe bei den Eigenwerten p_{10} und p_{20} der Teilglieder; man kann also

$$(7d) \quad p = -\varrho \pm i(\omega_0 + \Delta\omega)$$

setzen. Führt man diesen Ausdruck in die Stammgleichung (4) ein und beachtet, daß ϱ und $\Delta\omega$ im Vergleich zu ω_0 kleine Größen sind, so ergeben sich zur Berechnung von $\Delta\omega$ und ϱ die Gleichungen

$$(8a) \quad \Delta\omega^2 - (\varrho_{10} - \varrho)(\varrho_{20} - \varrho) = \Re.$$

$$(8b) \quad \Delta\omega(\varrho_{10} + \varrho_{20} - 2\varrho) = \Im.$$

Darin ist \Re der reelle und \Im der imaginäre Teil des Ausdrucks

$$(8c) \quad \frac{a_{12}^2}{4\omega_0^2 m_{11} m_{22}} = \Re + i\Im.$$

Hier kann man für a_{12} nach Gl. (2) den Näherungswert

$$(8d) \quad a_{12} = k_{12} + i\omega_0 r_{12} - \omega_0^2 m_{12}$$

benutzen. Mittels der Gl. (8a) bis (8d) kann man die Größen ϱ und $\Delta\omega$ für jede beliebige Art der Kopplung, insbesondere auch für gemischte Kopplungen berechnen. Besonders einfache Beziehungen erhält man, wenn es sich entweder um *reine Energiekopplung* handelt, wobei

$$(9a) \quad r_{12} = 0$$

ist, während k_{12} oder m_{12} oder auch beide von Null verschieden sind, oder um *reine Widerstandskopplung*, mit

$$(9b) \quad \begin{cases} k_{12} = m_{12} = 0, \\ r_{12} \neq 0. \end{cases}$$

In beiden Fällen wird, wie (8c) und (8d) lehren,

$$(9c) \quad \Im = 0,$$

während das Vorzeichen von \Re bei *Energiekopplung* positiv, bei *Widerstandskopplung* dagegen negativ ist.

Aus (9c) und (8b) folgt, daß entweder

$$(10) \quad \Delta \omega = 0$$

oder

$$(11) \quad \varrho = \frac{\varrho_{10} + \varrho_{20}}{2}$$

sein muß.

A. Die Möglichkeit $\Delta \omega = 0$

führt nach Gl. (8a) zu einer quadratischen Gleichung für ϱ mit den Lösungen

$$(10a) \quad \varrho = \frac{\varrho_{10} + \varrho_{20}}{2} \mp \sqrt{\frac{(\varrho_{10} - \varrho_{20})^2}{4} - \Re}.$$

Da die Dämpfungen ϱ immer reell sein müssen (nach Definition) kommt für reine *Energiekopplung* (\Re positiv) die Lösung (10), (10a) nur in Betracht, so lange

$$(10b) \quad |d| = |\varrho_{20} - \varrho_{10}| > 2\sqrt{\Re}$$

ist, d. h. die in \Re steckende Kopplung eine bestimmte Grenze nicht überschreitet. Diese von Max Wien entdeckte *kritische Kopplung* ist durch

$$(10c) \quad |d| = 2\sqrt{\Re}$$

bestimmt. Für reine Federkopplung und auch für reine Massenkopplung ergibt sich der kritische Kopplungsgrad x aus (10c) zu

$$(10d) \quad x = \frac{|\varrho_{20} - \varrho_{10}|}{\omega_0} = \frac{k_{12}}{\sqrt{k_{11}k_{22}}} \quad \text{oder} \quad = \frac{m_{12}}{\sqrt{m_{11}m_{22}}}.$$

Wächst die Kopplung über den durch Gl. (10c) bestimmten Wert hinaus, so wird die Lösung nach Gl. (10) und (10a) unbrauchbar. Für

$$(11a) \quad |d| = |\varrho_{20} - \varrho_{10}| < 2\sqrt{\Re}$$

gilt

$$B. \text{ die Möglichkeit } \varrho = \frac{\varrho_{10} + \varrho_{20}}{2} = \varrho_m$$

Sie führt mittels Gl. (8a) zu den Lösungen

$$(11b) \quad \Delta \omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\Re - d^2}.$$

Die vorstehenden Gleichungen drücken die folgende bei *reiner Energiekopplung* wohlbekannte Erscheinung aus: Koppelt man zwei aufeinander abgestimmte Schwingungsglieder, von extrem loser Kopplung beginnend, in zunehmend stärkerem Maße miteinander, so behalten die Eigenschwingungen zunächst die Frequenz der ungekoppelten Glieder, während sich die Dämpfungen allmählich dem Mittelwert $\varrho_m = \frac{1}{2}(\varrho_{10} + \varrho_{20})$ nach Gl. (10a) nähern. Bei der kritischen Kopplung [Gl. (10c)] haben die beiden Dämpfungen diesen Wert erreicht; sie behalten ihn auch bei stärkerer Kopplung bei, während jetzt die Frequenzen nach Gl. (11b) auseinanderstreben.

Bei *reiner Widerstandskopplung* ist die Sache anders. Hier ist die Lösung nach Gl. (11), (11a), (11b) unbrauchbar; da \Re negativ ist, würde sie nach (11b) zu einem imaginären Wert für $\Delta\omega$ führen, während die Frequenzänderung definitionsgemäß nur reell sein kann. Mithin liegt nur die Möglichkeit A vor, d. h. die Lösung ist durch die Gl. (10) und (10a) gegeben. Bei *reiner Widerstandskopplung abgestimmter Schwingungsglieder gibt es keine kritische Kopplung. Es tritt auch keine Frequenzverschiebung in den Eigenschwingungen auf, dagegen streben die Dämpfungen nach Gl. (10a) mit zunehmender Kopplung mehr und mehr auseinander.*

3. Beide Glieder etwas gegeneinander verstimmt;
sonst beliebig zusammengesetzt

Wir setzen

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{k_{11}}{m_{11}} = \left[\omega_0 \left(1 - \frac{v}{2} \right) \right]^2 \\ \frac{k_{22}}{m_{22}} = \left[\omega_0 \left(1 + \frac{v}{2} \right) \right]^2. \end{cases}$$

v ist die Verstimmung, die wir als klein voraussetzen; $\omega_0/2\pi$ ist der Mittelwert der Eigenfrequenzen der beiden Teilglieder. Auch in diesem Fall spielt der Dämpfungsunterschied $d = \varrho_{20} - \varrho_{10}$ eine wichtige Rolle. Setzt man die Eigenwerte wieder in der Form Gl. (7d) an, so ergeben sich die gesuchten Dämpfungen ϱ und Frequenzverlagerungen $\Delta\omega$ aus den Gleichungen

$$(12a) \quad \Delta\omega^3 - (\varrho_{10} - \varrho)(\varrho_{20} - \varrho) - \frac{v^2 \omega_0^2}{4} = \Re,$$

$$(12b) \quad -\Delta\omega(\varrho_{10} + \varrho_{20} - 2\varrho) + \frac{v\omega_0}{2}(\varrho_{10} - \varrho_{20}) = \Im.$$

\Re und \Im sind durch Gl. (8c) erklärt. Bei *reiner Energiekopplung* oder bei *reiner Widerstandskopplung*, auf die wir uns weiterhin beschränken, ist $\Im = 0$.

Unterfall A: Beide Glieder gleichstark gedämpft ($d = 0$)

Hier ist also $\varrho_{10} = \varrho_{20} = \varrho_0$. Aus Gl. (12a) und (12b) folgen die beiden Möglichkeiten, entweder:

$$(13a) \quad \varrho = \varrho_0; \quad \Delta\omega = \pm \sqrt{\Re + \frac{v^2 \omega_0^2}{4}}$$

oder:

$$(13b) \quad \Delta\omega = 0; \quad \varrho = \varrho_0 \pm \sqrt{-\Re - \frac{v^2 \omega_0^2}{4}}.$$

Für reine Energiekopplung (\Re positiv) scheidet (13b) aus, weil die Dämpfung reell bleiben muß. Es gilt mithin (13a), d. h. die Dämpfung bleibt unverändert, während die Verstimmung mit zunehmender Kopplung wächst. Eine kritische Kopplung gibt es nicht.

Für reine Widerstandskopplung (\Re negativ) gilt (13a), so lange

$$(14a) \quad |\Re| < \frac{v^2 \omega_0^2}{4}.$$

Die Dämpfung bleibt unverändert, während die Verstimmung mit wachsender Kopplung abnimmt. Mit

$$(14b) \quad |\Re| = \frac{v^2 \omega_0^2}{4}$$

verschwindet die Verstimmung ($\Delta\omega = 0$).

Steigt die Kopplung über den durch (14b) gegebenen kritischen Wert hinaus, so wird (13a) unbrauchbar, weil $\Delta\omega$ nicht imaginär werden kann; es gilt nun die Lösung nach Gl. (13b), d. h. die genaue Abstimmung¹⁾ bleibt erhalten, während die Dämpfungen auseinanderstreben.

Bemerkenswert ist hier das Auftreten einer kritischen Kopplung bei reiner Widerstandskopplung, wogegen sie bei reiner Energiekopplung fehlt; der hier betrachtete Unterfall bildet mithin ein Gegenstück zum Fall des Abschn. 2. Bei jenem haben die Teiglieder dieselbe Eigenfrequenz, aber verschiedene Dämpfung; hier sind die Eigenfrequenzen verschieden und die Dämpfungen gleich. Diesen unterschiedlichen Voraussetzungen entspricht das gegensätzliche Verhalten bei Kopplung.

Allgemeiner Fall B: Glieddämpfungen ungleich ($d \neq 0$)

Wir unterscheiden: extrem lose Kopplung, schwache und stärkere Kopplung.

1) Die in den Teigliedern nicht vorhanden war und im gekoppelten System durch die überkritische Kopplung erwungen ist.

a) *Extrem lose Kopplung*, gekennzeichnet durch die Voraussetzung

$$(15a) \quad \Re \ll d.$$

Hiermit und mit $\Im = 0$ folgt aus (12a) und (12b) für die eine Eigenschwingung des gekoppelten Systems:

$$(15b) \quad \omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{2}\right); \quad \varrho_1 = \varrho_{10} + \frac{\Re}{d},$$

für die zweite Eigenschwingung:

$$(15c) \quad \omega_2 = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{2}\right); \quad \varrho_2 = \varrho_{10} - \frac{\Re}{d}.$$

Gl. (15b) und (15c) besagen: *Bei extrem loser Kopplung stimmen die Eigenschwingungen des gekoppelten Systems überein mit den Eigenschwingungen der ungekoppelten Teile. Hinsichtlich der Dämpfungen tritt eine Verlagerung ein, und zwar werden sie bei reiner Energiekopplung einander genähert, während sie bei reiner Widerstandskopplung auseinandergehen.*

b) *Schwache Kopplung*, mit

$$(16a) \quad \Re < \frac{d^2}{4}.$$

Bestünde keine Verstimmung ($v = 0$), so wäre nach den Darlegungen unter 2 für beide Eigenschwingungen $\omega = \omega_0$, und die Dämpfungen hätte man aus Gl. (10a) zu berechnen. Die sich dabei ergebenden Werte bezeichnen wir mit ϱ_1 und ϱ_{11} .

Für endliche Verstimmung ($v \neq 0$) setzen wir

$$(16b) \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega_1 & \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega_2 \\ \varrho_1 = \varrho_1 + \Delta\varrho_1 & \varrho_2 = \varrho_{11} + \Delta\varrho_2. \end{cases}$$

Die auf Gl. (12a) und (12b) beruhende Berechnung der Verlagerungen $\Delta\omega$ und $\Delta\varrho$ ergibt die Werte:

$$(16c) \quad \Delta\omega_{1,2} = \mp \frac{v \omega_0 d}{2 \sqrt{d^2 - 4\Re}}$$

$$(16d) \quad \Delta\varrho_{1,2} = \mp \frac{\Re v^2 \omega_0^2}{(d^2 - 4\Re)^{3/2}}.$$

Aus diesen Gleichungen liest man folgende Regeln ab:

Bei reiner Energiekopplung (\Re positiv) wird die Verstimmung vergrößert, bei reiner Widerstandskopplung (\Re negativ) dagegen verkleinert. Im ersten Falle wird der Dämpfungsunterschied verkleinert, im zweiten vergrößert; jedoch ist der Betrag dieser Verkleinerung bzw. Vergrößerung geringer als bei gleich starker Kopplung von Gliedern ohne Verstimmung.

c) *Stärkere Kopplung.* Die Formeln (16c) und (16d) werden bei Energiekopplung (\Re positiv) und Annäherung von \Re an den Wert $d^2/4$ unbrauchbar. Dies liegt daran, daß (16c) nur näherungsweise gilt¹⁾. Wenn die Kopplung nicht mehr sehr klein ist, knüpft man besser an das bei überkritischer Energiekopplung von genau abgestimmten Gliedern gefundene Ergebnis an, daß die Dämpfung beider Eigenschwingungen den Wert

$$(11) \quad \varrho_m = \frac{\varrho_{10} + \varrho_{20}}{2}$$

hat (Abschn. 2, B). Wir setzen daher hier

$$(17a) \quad \varrho = \varrho_m + \Delta\varrho$$

in die allgemeinen Gl. (12a) und (12b) ein; diese nehmen dann die Gestalt an

$$(17b) \quad \begin{cases} \Delta\omega^2 - \Delta\varrho^2 = a = \Re - \frac{d^2}{4} + \frac{v^2 \omega_0^2}{4}, \\ \Delta\omega \cdot \Delta\varrho = b = \frac{v \omega_0 d}{4}. \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$(17c) \quad \begin{cases} \Delta\omega^2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}, \\ \Delta\varrho^2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}. \end{cases}$$

Gl. (17c) ist für beliebige Werte von a und b brauchbar, da die rechten Seiten stets positiv und somit $\Delta\omega$ und $\Delta\varrho$ reell ausfallen, wie es sein muß.

Von Interesse sind die beiden Grenzfälle $|a| \ll b$ und $|a| \gg b$.

Grenzfall $|a| \ll b$. Ein kleiner Betrag von a bedeutet nach der ersten Gl. (17b), daß

$$(18a) \quad \Re \approx \frac{d^2}{4} - \frac{v \omega_0^2}{2}$$

ist. Man könnte die durch diesen Wert von \Re bestimmte Kopplung als *kritische Kopplung im Fall der Verstimmung* bezeichnen; denn in der Tat geht (18a) mit $v = 0$ in die Gl. (10c) über. Ihre Bedeutung ergibt sich aus den Näherungsformeln, die man aus (17c) für kleine Werte von a erhält:

$$(18b) \quad \begin{cases} \pm \Delta\omega = \frac{1}{2} \sqrt{v \omega_0 d} + \frac{a}{2 \sqrt{v \omega_0 d}}, \\ \pm \Delta\varrho = \frac{1}{2} \sqrt{v \omega_0 d} - \frac{a}{2 \sqrt{v \omega_0 d}}. \end{cases}$$

1) Die genaue Formel lautet

$$\Delta\omega_{1,2} = - \frac{v \omega_0 d}{-4 \Delta\varrho_{1,2} \pm 2 \sqrt{d^2 - 4 \Re}}.$$

Bei der kritischen Kopplung ($a = 0$) ist $\Delta\omega = \Delta\rho$. Mit der Kopplung ändern sich diese Größen gegenläufig: $\Delta\omega$ nimmt zu, $\Delta\rho$ dagegen ab.

Im übrigen lehrt Gl. (18a), daß bei überwiegender Dämpfungsverstimmung, d. h. mit $d > v\omega_0$ die kritische Kopplung bei positivem \Re , d. h. als reine Energiekopplung auftritt, bei überwiegender Frequenzverstimmung ($d < v\omega_0$) dagegen bei negativem \Re , d. h. als reine Widerstandskopplung.

Grenzfall $|a| \gg b$, d. h.

$$(19a) \quad \Re \gg \frac{d^2}{4} - \frac{v\omega_0^2}{2}.$$

Hiermit folgt aus (17c)

$$(19b) \quad \begin{cases} \pm \Delta\omega \approx \sqrt{a}, \\ \pm \Delta\rho \approx \frac{v\omega_0 d}{4\sqrt{a}}. \end{cases}$$

Der betrachtete Grenzfall entspricht reiner Energiekopplung; gemäß (19b) nimmt die Verstimmung mit \sqrt{a} zu, dagegen die Dämpfungsdifferenz mit $1/\sqrt{a}$. Es ist

$$(19c) \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + \sqrt{a}, & \rho_1 = \rho_m + \frac{v\omega_0 d}{4\sqrt{a}}, \\ \omega_2 = \omega_0 - \sqrt{a}, & \rho_2 = \rho_m - \frac{v\omega_0 d}{4\sqrt{a}}, \\ a = \Re - \frac{d^2}{4} + \frac{v^2\omega_0^2}{4} \approx \Re. \end{cases}$$

Mit $v = 0$ (aufeinander abgestimmte Glieder) führen diese Gleichungen auf den Fall des Abschn. 2, B zurück [Gl. (11), (11b)].

4. Beide Glieder gegeneinander stark verstimmt

Für die ungekoppelten Glieder hat man die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen¹⁾

$$(20a) \quad \omega_{10} = \sqrt{\frac{k_{11}}{m_{11}}}, \quad \omega_{20} = \sqrt{\frac{k_{22}}{m_{22}}}$$

und die Dämpfungen

$$(20b) \quad \rho_{10} = \frac{r_{11}}{2m_{11}}, \quad \rho_{20} = \frac{r_{22}}{2m_{22}}.$$

Im gekoppelten System erfahren diese Größen bei mäßiger Größe der Kopplung kleine Verlagerungen; es werde demgemäß gesetzt:

$$(20c) \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_{10} + \Delta\omega_1, & \omega_2 = \omega_{20} + \Delta\omega_2, \\ \rho_1 = \rho_{10} + \Delta\rho_1, & \rho_2 = \rho_{20} + \Delta\rho_2. \end{cases}$$

¹⁾ Die Dämpfungen sind als klein vorausgesetzt; andernfalls sind die Gl. (20a) in bekannter Weise abzuändern.

Schreibt man allgemein

$$p_1 = p_{10} + \Delta p_1,$$

$$p_2 = p_{20} + \Delta p_2$$

mit

$$p_{10} = -\varrho_{10} \pm i \omega_{10}, \quad \Delta p_1 = -\Delta \varrho_1 \pm i \Delta \omega_1,$$

$$p_{20} = -\varrho_{20} \pm i \omega_{20}, \quad \Delta p_2 = -\Delta \varrho_2 \pm i \Delta \omega_2,$$

so ergibt die auf Grund dieser Ansätze durchgeführte Näherungsrechnung die Lösung

$$(21) \quad \Delta p_1 = \pm \frac{a_{12}^2}{2 i m_{11} m_{22} \omega_{10} (\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2)} \left[1 \mp \frac{2 i \omega_{10} d}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2} \right].$$

Für Δp_2 erhält man denselben Ausdruck mit vertauschten Indizes 1 und 2.

In Gl. (21) hat a_{12} [entsprechend Gl. (8d)] den Wert

$$(21a) \quad a_{12} = k_{12} + i \omega_{10} r_{12} - \omega_{10}^2 m_{12}.$$

Zur Berechnung von Δp_2 ist in (21a) ω_{10} durch ω_{20} zu ersetzen und umgekehrt.

Die Gl. (21) und (21a) gelten, wie man sieht, ganz allgemein für beliebige (auch gemischte) Kopplungsarten. Einfache Ausdrücke für die Frequenzverlagerungen $\Delta \omega$ und die Dämpfungsverlagerungen $\Delta \varrho$ ergeben sich wieder, wenn a_{12}^2 reell ist, d. h. für reine Energiekopplung ($r_{12} = 0$) oder reine Widerstandskopplung ($k_{11} = m_{12} = 0$). Hierfür schreiben wir, analog zur Gl. (8c)

$$(21b) \quad \frac{a_{12}^2}{4 \omega_{10} \omega_{20} m_{11} m_{22}} = \Re_1 \text{ oder } \Re_2,$$

wobei in a_{12} gemäß Gl. (21a) zur Berechnung von \Re_1 die Kreisfrequenz ω_{10} und zur Berechnung von \Re_2 die Kreisfrequenz ω_{20} einzusetzen ist.

Hiermit erhält man für die gesuchten Verlagerungen die Ausdrücke

$$(21c) \quad \begin{cases} \Delta \omega_1 = -\frac{2 \Re_1 \omega_{20}}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2}; & \Delta \varrho_1 = \frac{4 \Re_1 \omega_{10} \omega_{20} d}{(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2)^2}; \\ \Delta \omega_2 = +\frac{2 \Re_2 \omega_{10}}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2}; & \Delta \varrho_2 = -\frac{4 \Re_2 \omega_{10} \omega_{20} d}{(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2)^2}. \end{cases}$$

Wie vorher bedeutet d die Dämpfungsdifferenz

$$d = \varrho_{20} - \varrho_{10}.$$

Aus Gl. (21c) schließen wir:

Koppelt man stark verstimmte Schwingungsglieder miteinander, so werden bei reiner Energiekopplung (Feder- oder bzw. und Massenkopplung) die Eigenfrequenzen auseinander getrieben, die Dämpfungen dagegen einander genähert. Bei einer Widerstandskopplung werden dagegen die Dämpfungen auseinander getrieben und die Eigenfrequenzen einander genähert.

Waren zufällig die beiden Schwingungsglieder vor der Kopplung gleich stark gedämpft ($d = 0$), so bewirkt jedoch die Kopplung keine Dämpfungsänderungen, sondern nur Frequenzverschiebungen.

5. Elektrische Schwingungskreise

Für gekoppelte elektrische Schwingungskreise gelten sämtliche vorher angegebenen Beziehungen, wenn man ersetzt

die Federsteife k durch den Kehrwert der Kapazität $1/C$;

die Reibung r durch den Widerstand R ;

die Masse m durch die Induktivität L ;

den Ausschlag x durch die Ladung Q ;

die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ durch die Stromstärke $I = \frac{dQ}{dt}$.

Die mit dem Zeiger 11 versehenen Größen bezeichnen die elektrischen Konstanten des Kreises 1 einschließlich des Kopplungszweiges; die mit dem Zeiger 12 versehenen Größen beziehen sich auf den Kopplungszweig allein.

Berlin-Schöneberg, Nymphenburger Straße 11.

(Eingegangen 23. März 1938)